

Løsningsforslag nasjonal deleksamen

MA103 5-10

Innhold

Hvordan bruke løsningsforslagene?	2
Økt 1	2
Eksamen V20 oppgave 10	2
Eksamen H19 oppgave 4	3
Oppgave om utledning av formelen for trekantthall	5
Økt 2	7
Eksempeloppgave H19 oppgave 1	7
Eksamen V20 oppgave 1	8
Eksamen H19 oppgave 1	9
Økt 3	10
Eksempeloppgave H19 oppgave 4	10
Eksamen H19 oppgave 2	11
Økt 4	14
Eksamen V20 oppgave 4	14
Eksamen V20 oppgave 8	15
Eksamen V20 oppgave 9	16
Økt 5	17
Eksempeloppgave H19 oppgave 2	17
Eksamen V20 oppgave 2	18
Eksempeloppgave H19 oppgave 3	19
Økt 6	22
Eksamen V20 oppgave 6	22
Eksamen V20 oppgave 3	22
Eksamen V20 oppgave 7	23
Eksamen V20 oppgave 5	25

Hvordan bruke løsningsforslagene?

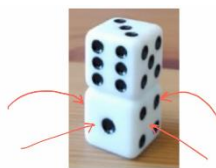
Hvis det er noe du ikke forstår i et løsningsforslag, anbefaler jeg at du ser på den videosnutten som er laget til oppgaven.

Jeg har skrevet løsningsforslagene på en slik måte at dere kan bruke dem som modell for deres egne eksamensbesvarelser med tanke på hvor detaljerte besvarelsene skal være og hvor mye svarene skal begrunnes, men noen ganger kan løsningsforslagene være mer detaljerte enn det som forventes på eksamen.

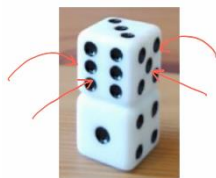
Økt 1

Eksamen V20 oppgave 10

a) Fire synlige vegger i 1. etasje:



Fire synlige vegger i 2. etasje:



I tillegg har vi taket:



Altså, fire synlige vegger per etasje pluss taket.

10 terninger: $10 \cdot 4 + 1 = 41$

11 terninger: 4 synlige terningsider i tillegg, dvs $41 + 4 = 45$

b) Jeg lar a_n være antall synlige sider i et tårn med n etasjer.

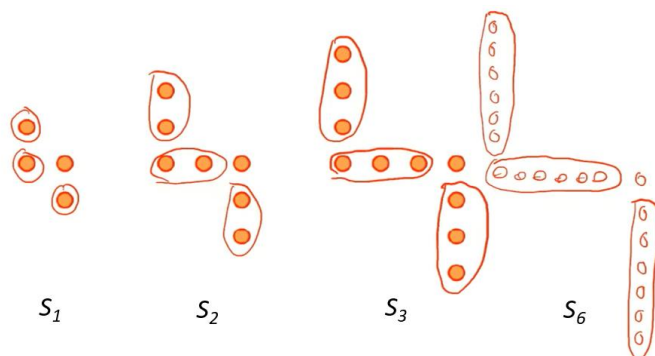
$$a_n = 4n \text{ (fire synlige vegger per etasje) } + 1 \text{ (taket)}$$

$$a_n = 5 \text{ (fem synlige vegger for den øverste terningen) } + 4(n - 1) \text{ (fire synlige vegger for resten av terningene)}$$

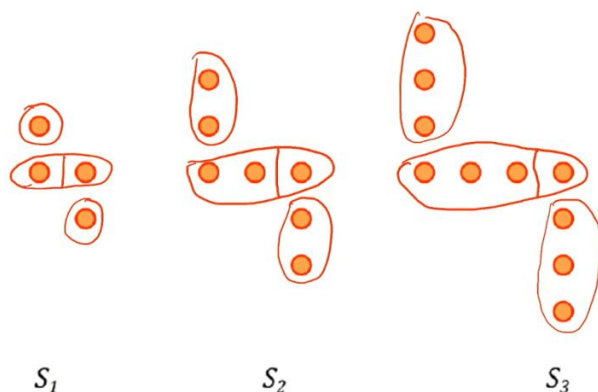
$$a_n = 6n \text{ (seks sideflater per etasje) } - 2n \text{ (gulv og tak per etasje) } + 1 \text{ (taket for den øverste terningen)}$$

Eksamen H19 oppgave 4

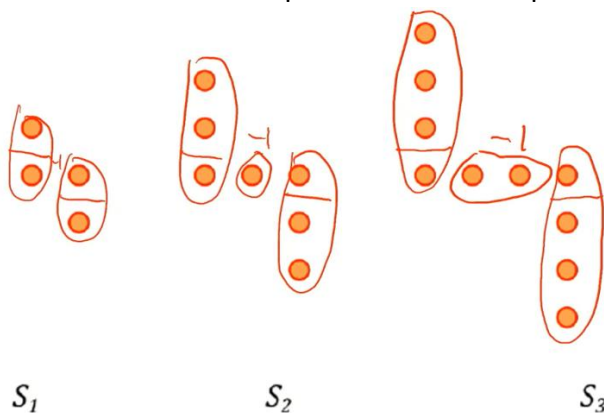
- a) Vi ser at hvert stoltall består av tre «striper» som inneholder like mange prikker som figurnummeret. I tillegg er det én prikk ekstra. S_6 består dermed av 3 striper som inneholder 6 prikker hver, og en prikk ekstra.



- b) $S_n = 2n + (n + 1)$: Hvert stoltall består av 3 striper som vist på figuren nedenfor. « $2n$ » står for 2 striper der hver stripe inneholder like mange prikker som figurnummeret. « $n + 1$ » står for en stripe som inneholder en prikk mer enn figurnummeret.



$S_n = 2(n + 1) + n - 1$: Hvert stoltall består av 3 striper som vist på figuren nedenfor. « $2(n + 1)$ » står for 2 striper der hver stripe inneholder en prikk mer enn figurnummeret. « $n - 1$ » står for en stripe som inneholder en prikk mindre enn figurnummeret. Dette har jeg symbolisert ved å skrive «-1» over denne stripen. Legg merke til at denne stripen har blitt borte på S_1 .



Jeg viser at disse formlene er algebraisk like ved å trekke sammen og forenkle hver formel så mye som mulig:

$$S_n = 2n + (n+1) =$$

$$2n + n + 1 =$$

$$\boxed{3n + 1}$$

$$S_n = 2(n+1) + n - 1 =$$

$$2n + 2 + n - 1 =$$

$$\boxed{3n + 1}$$

- c) Jeg tar utgangspunkt i formelen $3n + 1$ som jeg kom frem til i oppgave b). Dette uttrykket må være mindre eller lik 131, fordi jeg bare har 131 prikker til rådighet. Dermed får jeg ulikheten som er vist nedenfor. Jeg løser ulikheten og får at n må være mindre eller lik $43\frac{1}{3}$. Da n må være et helt tall, er stoltall nummer 43 det største jeg kan lage.

$$3n + 1 \leq 131$$

$$3n + 1 - 1 \leq 131 - 1$$

$$\frac{3n}{3} \leq \frac{130}{3}$$

$$n \leq 43\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{43}}$$

- d) Jeg begynner med å gi tallfølgen et navn: $P_1 = 2$, $P_2 = 7$, $P_3 = 15$ og $P_4 = 26$. I oppgaven er det gitt et hint om å bruke kvadrattall og trekantall. Derfor tegner jeg opp de fire første kvadrat- og trekantallene som vist nedenfor. Da ser jeg at hvert av tallene i følgen er summen av et kvadrattall og et trekantall:

$K_1=1$ $K_2=4$ $K_3=9$ $K_4=16$ | $T_1=1$ $T_2=3$ $T_3=6$ $T_4=10$

$P_1=2=1+1$ $P_2=7=4+3$ $P_3=15=9+6$ $P_4=26=16+10$

$P_1=K_1+T_1$ $P_2=K_2+T_2$ $P_3=K_3+T_3$ $P_4=K_4+T_4$

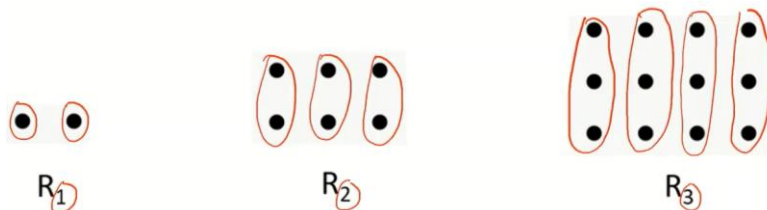
Altså er $P_n = K_n + T_n$. Vi vet at $K_n = n \cdot n = n^2$. Fra «Oppgave om utledning av formelen for trekantall» vet vi at $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Altså er:

$$P_n = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 \cdot n^2}{2} + \frac{n^2+n}{2} = \frac{2n^2+n^2+n}{2} = \frac{3n^2+n}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$P_n = \frac{n(3n+1)}{2}$

Oppgave om utledning av formelen for trekantall

- a) Ved å studere rektangetallene finner jeg følgende mønster:

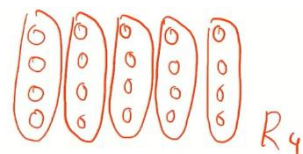


I R_1 er det 2 striper, det vil si én mer en figurnummeret. Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.

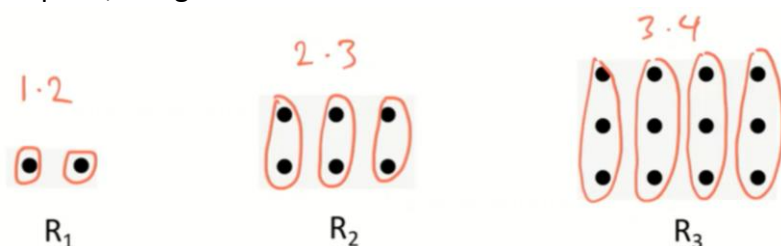
I R_2 er det 3 striper, det vil si én mer en figurnummeret. Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.

I R_3 er det 4 striper, det vil si én mer en figurnummeret. Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.

Da mønsteret fortsetter på den samme måten, er det 5 striper i R_4 . Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.



- b) Jeg finner antall prikker i et rektangeltall ved å gange antall striper med antall prikker i stripene, se figuren nedenfor:

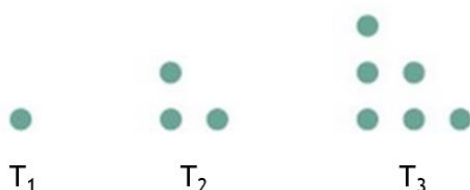


Antall prikker i en stripe i figur n er figurnummeret, det vil si n .

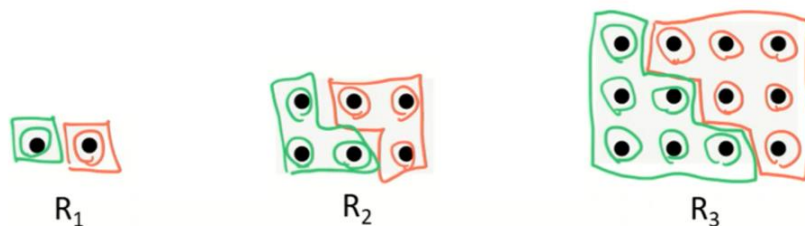
Antall striper i figur n er én mer enn figurnummeret, det vil si $n + 1$.

Jeg lar R_n stå for antall prikker i det n 'te rektangeltallet. Da blir $R_n = n \cdot (n + 1)$.

- c) Nedenfor ser du de tre første trekantallene:



Dermed ser jeg at inndelingen kan gjøres på følgende måte:

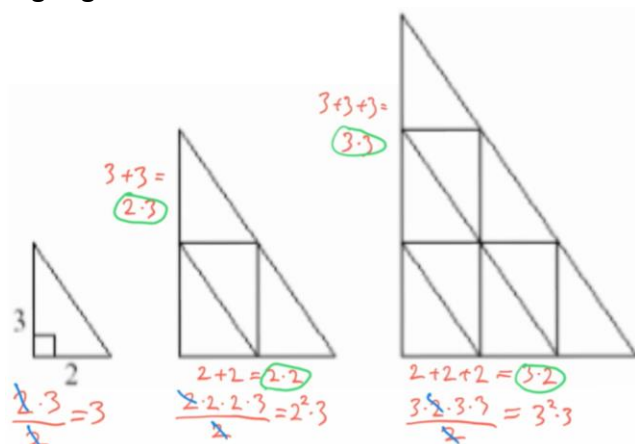


- d) Fra figuren i oppgave c) ser jeg at $R_3 = 2 \cdot T_3$, $R_2 = 2 \cdot T_2$ og $R_1 = 2 \cdot T_1$. Da alle rektangeltallene er bygd opp på den samme måten, blir $R_n = 2 \cdot T_n$. Så setter jeg formelen $R_n = n \cdot (n + 1)$ inn denne relasjonen som vist nedenfor. Til slutt deler jeg på to på begge sider for å få T_n alene på venstresiden av likhetstegnet.

$$\begin{aligned}
 R_n &= 2 \cdot T_n \\
 2 \cdot T_n &= R_n \\
 \cancel{2} \cdot T_n &= \frac{n \cdot (n+1)}{\cancel{2}} \\
 T_n &= \frac{n \cdot (n+1)}{2}
 \end{aligned}
 \qquad
 R_n = n \cdot (n+1)$$

Eksempeloppgave H19 oppgave 1

- | Figur nr. | Antall små trekanter |
|-----------|----------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| n | |



Arealet av de tre første trekantene i følgen blir dermed:

Trekant 2: $2^{2.3}$

Trekant 3: $3^2 \cdot 3$

I oppgaven ble vi bedt om å finne antall små trekanter i hver figur. Da arealet av den lille trekanten er 3, må vi dele arealene på 3 for å finne antall trekanter i hver figur. Dermed blir antall trekanter i de tre første trekantene som følger:

Antall små trekanter i trekant 1: 1^2

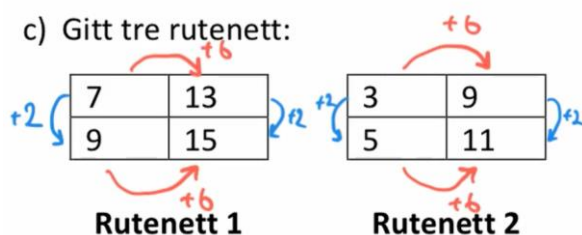
Antall små trekanter i trekant 2: 2^2

Antall små trekanter i trekant 3: 3^2

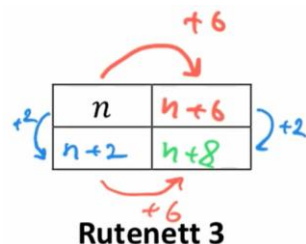
Da alle trekantene i mønsteret er bygd opp på den samme måten, er det n^2 små trekanter i trekant n .

- c) i) Det første jeg gjør er å prøve å se et mønster i rutenett 1 og 2.

c) Gitt tre rutenett:



Jeg ser at jeg legger til 6 når jeg går fra en kolonne til den neste, og jeg legger til 2 når jeg går fra en rad til den neste. Så fyller jeg dette mønsteret inn i rutenett 3:



- ii) Jeg regner ut differansen mellom produktene av diagonalene i rutenett 2 og 3 på den samme måten som blir forklart i oppgaven. Da får jeg:

$$5 \cdot 9 - 3 \cdot 11 = 45 - 33 = 12$$

$$(n+2) \cdot (n+6) - n \cdot (n+8) = \cancel{n^2} + 6n + 2n + 12 - \cancel{n^2} - 8n = 12$$

Altså blir differansen mellom produktene av diagonalene i begge tilfeller 12.

Eksamen V20 oppgave 1

- a) Formuler en funksjonsoppgave der elever på 8. trinn må gå fra en situasjon til et funksjonsuttrykk. Du skal også lage et løsningsforslag til oppgaven.

Hans plukker jordbær. Dagslønna er basert på en grunnlønn på 150 kr i tillegg til 100 kr for hver time han jobber. Lag et funksjonsuttrykk som viser sammenhengen mellom dagslønna og antallet timer som Hans jobber.

x : antall timer Hans jobber på en dag
 y : dagslønna
 Konstantledd: 150
 Stigningstall: 100
 $y = 100x + 150$

- b) Formuler en funksjonsoppgave der elever på 8. trinn må gå fra en tabell til et funksjonsuttrykk. Du skal også lage et løsningsforslag til oppgaven.

Tabellen viser en sammenheng mellom noen x - og y -verdier. Hvilket funksjonsuttrykk passer til verdiene i tabellen?

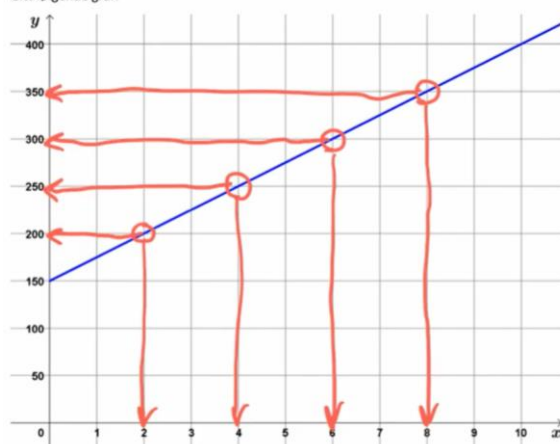
x	y
1	1
3	5
6	11

Jeg må doble x -verdiene og trekke fra 1 for å få y -verdiene.
 $y = 2x - 1$

Eksamen H19 oppgave 1

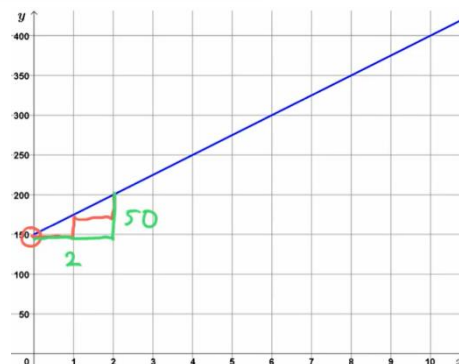
- a) Jeg merker av fire punkter, leser av x- og y-koordinatene og fører tallene inn i en tabell.

Gitt følgende graf:



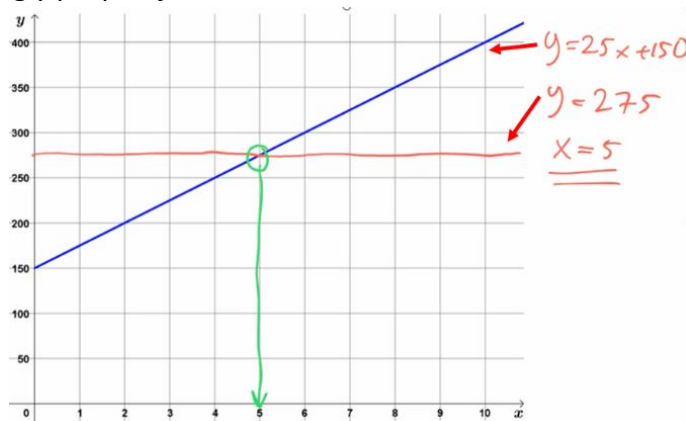
x	2	4	6	8
y	200	250	300	350

- b) Da grafen er en rett linje, er funksjonen lineær. Dermed er funksjonsuttrykket på formen $y = ax + b$, der a er stigningstallet og b konstantleddet. Linjen skjærer y-aksen i 150. Dermed er konstantleddet 150. Hvis jeg starter i skjæringspunktet med y-aksen og går 2 enheter horisontalt mot høyre, stiger linjen med 50 enheter. Dermed er stigningstallet $50:2 = 25$. Konklusjon: ligningen $y = 25x + 150$ beskriver grafen over.



- c) Grafen kan representere prisen for en taxitur. Her representerer x-aksen antall kjørte km, og y-aksen representerer prisen for en kjøretur på x km. Startavgiften er på 150 kroner, og prisen pr km er 25 kr. Prisen for en kjøretur på for eksempel 6 km, blir da $25 \cdot 6 + 150$ kroner.
- d) Hvis x og y er proporsjonale, kan y skrives som $y = kx$. Hvis vi setter $x = 0$, så blir $y = k \cdot 0 = 0$. Altså vil en lineær funksjon alltid gå gjennom origo. Grafen til $y = 25x + 150$ går ikke gjennom origo, og dermed er ikke x og y proporsjonale.

- e) Når man skal løse ligningen $275 = 150 + 25x$ grafisk, tegner man grafene til uttrykkene på hver side av likhetstegnet i et koordinatsystem. Løsningen til ligningen finnes i skjæringspunktet mellom de to grafene. Ved avlesning ser jeg at de to grafene skjærer hverandre i $x = 5$.



Økt 3

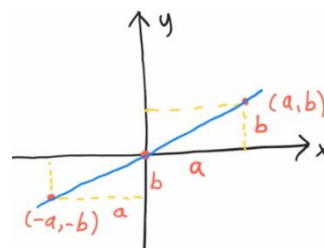
Eksempeloppgave H19 oppgave 4

Utsagn 1: Dette utsagnet sier at sammenhengen mellom to proporsjonale størrelser kan uttrykkes ved hjelp av en lineær funksjon. To størrelser x og y er proporsjonale hvis sammenhengen mellom dem kan skrives som $y = kx$. En lineær funksjon kan skrives på formen $y = ax + b$. Ved å sette $a = k$ og $b = 0$, får vi at $y = kx + 0 = kx$. Dermed har jeg vist at $y = kx$ er en lineær funksjon.

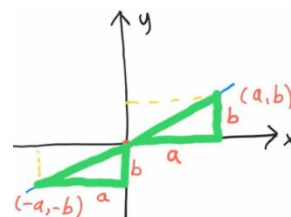
Utsagn 2: Dette utsagnet sier: For alle tall a og b ligger punktene (a,b) og $(-a,-b)$ symmetrisk om origo i et koordinatsystem. At to punkter ligger symmetrisk om origo i et koordinatsystem betyr følgende:

1. Begge punktene skal ligge på en rett linje som går gjennom origo.
2. Det skal være like langt fra origo til de to punktene.

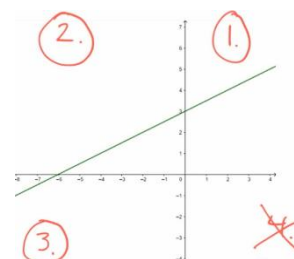
Begrunnelse for at punkt 1 er oppfylt: Jeg begynner i punktet $(-a,-b)$. Så går jeg a enheter vannrett mot høyre. Så går jeg b enheter loddrett oppover. Da ender jeg i origo. Så går jeg a enheter vannrett mot høyre. Så går jeg b enheter loddrett oppover. Da ender jeg i punktet (a,b) . Fordi bevegelsen fra $(-a,-b)$ til origo og bevegelsen fra origo til (a,b) var nøyaktig like, ligger $(-a,-b)$, origo og (a,b) på en rett linje.



Begrunnelse for at punkt 2 er oppfylt: Katetene i de to grønne trekantene er parvis like lange. På grunn av Pytagoras setning må da også hypotenusene være like lange. Dermed ligger $(-a,-b)$ og (a,b) like langt fra origo.



Utsagn 3: Dette utsagnet sier: Grafen til funksjonen $y = \frac{1}{2}x + 3$ går gjennom 1., 2. og 4. kvadrant. Til høyre har jeg tegnet grafen til funksjonen $y = \frac{1}{2}x + 3$. Jeg har også ført opp hva de ulike kvadrantene heter. Ut fra dette ser vi at grafen går gjennom 1., 2. og 3. kvadrant, men ikke gjennom 4. kvadrant. Dermed er utsagn 3 usant.



Eksamen H19 oppgave 2

- a) Elever som har svart 6, kan ha tenkt slik: De ser på likhetstegnet som «nå kommer svaret», og foran likhetstegnet står $9 - 3$. Derfor får de svaret 6. Elever som har svart 10, kan ha tenkt slik: De vet at $9 - 3 = 6$, og de legger deretter til 4 for å utføre regneoperasjonen på høyre side av likhetstegnet også. Derfor får de svaret 10.
- b) Venstre side: Jeg begynner med å tegne en rød pil som står for tallet 9. Så tegner jeg en blå pil som står for det å trekke fra 3. Da ender jeg på tallet 6.
Høyre side: Jeg begynner med å tegne en grønn pil som står for 4. Så spør jeg: Hvordan skal jeg komme fra den grønne pilspissen til tallet 6? Jo, da må jeg gå to enheter mot høyre (gul pil). Altså skal det stå 2 på den tomme plassen.



- c) Strategi 1 er riktig. Begrunnelse: Eleven regner først ut høyresiden: $12 - 7 = 5$. Så finner eleven ut at hvis man setter 5 på den tomme plassen, blir venstresiden $10 - 5$ som er 5. Dermed har eleven fått samme verdi på begge sider av likhetstegnet, og eleven kan konkludere med at tallet 5 skal stå på den tomme plassen.
- Strategi 2 er riktig. Begrunnelse: Eleven bruker en regel som gjelder for subtraksjon. Denne regelen sier at hvis det første tallet (minuend) i et subtraksjonsstykke reduseres, må også det andre tallet (subtrahend) reduseres like mye, for at svaret skal forbli det samme. Eleven ser at 12 (minuend på høyre side) må reduseres med 2 for å få 10 (minuend på venstre side). Derfor må også 7 (subtrahend på høyre side) reduseres med 2 for at verdien på høyresiden ikke skal endres. Når 7 reduseres med 2, får man 5, og dermed skal det stå 5 på den tomme plassen.
- Strategi 3 er feil fordi eleven ikke viser forståelse for at verdiene på begge sider av likhetstegnet skal være like. Eleven tenker at svaret på regnestykket $12 - 7$ skal stå på den tomme plassen. Tilfeldigvis gir dette riktig svar i akkurat dette tilfellet, men hvis det for eksempel hadde stått 11 istedenfor 10 på venstresiden av likhetstegnet, ville denne tenkemåten ikke gitt riktig svar.

- d) Løsning ved hjelp av «Gjett og sjekk»:

Prøver først med $25 + 26 + 27 = 78$, som er feil svar.

Prøver så med $26 + 27 + 28 = 81$, som er riktig svar.

Løsning ved hjelp av ligning:

$$\begin{array}{l} x: \text{Det første tallet} \\ x+1: \text{Det andre tallet} \\ x+2: \text{Det tredje tallet} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x \\ x+1 \\ x+2 \end{array}} \right\} 81$$
$$\begin{array}{l} x + (x+1) + (x+2) = 81 \\ \underline{x} + \underline{x+1} + \underline{x+2} = 81 \\ 3x + 3 = 81 \\ 3x + 3 - 3 = 81 - 3 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 3x = 78 \\ \underline{3} \\ x = 26 \\ x+1 = 27 \\ x+2 = 28 \end{array}$$

- e) Jeg begynner med å prøve meg frem med noen tall for å se om jeg kan se et mønster.

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 = 6 \\ 2 + 3 + 4 = 9 \\ 3 + 4 + 5 = 12 \\ 4 + 5 + 6 = 15 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1+2+3 \\ 2+3+4 \\ 3+4+5 \\ 4+5+6 \end{array}} \right\} 3\text{-gangen}$$

Det ser ut som om summen av tre etterfølgende naturlige tall alltid er et tall i 3-gangen. Jeg kaller det første naturlige tallet for $x-1$, det andre naturlige tallet for x og det tredje naturlige tallet for $x+1$. Jeg legger sammen disse tre tallene og får:

$$(x-1) + x + (x+1) = \underline{x-1} + \underline{x} + \underline{x+1} = 3x$$

Dermed er $(x-1) + x + (x+1) = 3x$. Da $3x$ er et tall i 3-gangen, gjelder følgende punkter:

1. Hvis vi legger sammen tre naturlige tall som kommer etter hverandre, får vi et tall i tre-gangen. Dette er den nødvendige egenskapen oppgaven spør etter.
2. Hvis et tall er med i tre-gangen, kan tallet alltid skrives som en sum av tre etterfølgende naturlige tall. Dette er den tilstrekkelige egenskapen oppgaven spør etter.

- f) Ligning 1 er riktig løst. Begrunnelse: I overgangen fra linje 1 til linje 2 bruker eleven den distributive loven baklengs. Dette er gjort på en riktig måte. I overgangen fra linje 2 til linje 3 bruker eleven produktregelen som sier at hvis et produkt er 0, så er minst en av faktorene lik null. Dette er også gjort på en riktig måte.

Ligning 2 er ikke riktig løst. Begrunnelse: I overgangen fra linje 1 til linje 2 bruker eleven den distributive loven baklengs. Dette er gjort på en riktig måte. Det er vanskelig å vite noe sikkert om hvordan eleven har tenkt i overgangen fra linje 2 til linje 3. Hvis vi setter $x = 6$ inn i linje 1, blir venstresiden av ligningen $6^2 + 5 \cdot 6 = 66$. Dette er forskjellig fra høyresiden i ligningen som er lik 6. Dermed er overgangen mellom linje 2 til linje 3 feil.

- g) Jeg ville forklart dette til Anne ved å legge til $2x$ på begge sider av ulikhetstegnet, trekke fra 10 på begge sider og dele på 2 på begge sider som vist til venstre for den røde streken nedenfor. Til høyre for den røde streken snur vi ulikhetstegnet fordi vi deler på et negativt tall, men dette er egentlig bare en snarvei for de regneoperasjonene vi har gjort på venstre side av den røde streken.

$$\begin{array}{l} -2x > 10 \\ -\cancel{2x} + \cancel{2x} > 10 + 2x \\ 0 > 10 + 2x \\ 0 - 10 > \cancel{10} - \cancel{10} + 2x \\ -10 > 2x \\ \frac{-2x}{2} < \frac{-10}{2} \\ \underline{\underline{x < -5}} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} -2x > 10 \\ \frac{-2x}{-2} < \frac{10}{-2} \\ \underline{\underline{x < -5}} \end{array}$$

Økt 4

Eksamen V20 oppgave 4

- i. Elevens strategi er riktig fordi eleven hele tiden utfører de samme operasjonene på begge sider av likhetstegnet.

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 = 13x - 10 \\
 \text{Riktig } 8 = 18x - 10 \\
 18 = 18x \\
 \boxed{1 = x}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 = 13x - 10 \\
 8 = 18x - 10 \\
 18 = 18x \\
 1 = x
 \end{array}$$

- ii. Elevens strategi er riktig fordi eleven hele tiden utfører de samme operasjonene på begge sider av likhetstegnet.

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 - 13x + 10 = 13x - 10 - 13x + 10 \\
 -5x - 13x + 8 + 10 = 0 \\
 -18x + 18 = 0 - 18 \\
 \frac{-18x}{-18} = \frac{-18}{-18} \\
 \boxed{x = 1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 = 13x - 10 \\
 -5x + 8 - 13x + 10 = 13x - 10 - 13x + 10 \\
 -5x - 13x + 8 + 10 = 0 \\
 -18x + 18 = 0 - 18 \\
 \frac{-18x}{-18} = \frac{-18}{-18} \\
 x = 1
 \end{array}$$

- iii. Elevens løsning er feil fordi hen regner ut at $13x - 10$ er lik $3x$. Resten av elevenes løsning er riktig, men det er bare en tilfeldighet som gjør at svaret blir riktig.

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 = 13x - 10 \\
 -5x + 8 = 3x \\
 \frac{8}{8} = \frac{8x}{8} \\
 \boxed{1 = x}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 = 13x - 10 \\
 -5x + 8 = 3x \\
 8 = 8x \\
 1 = x
 \end{array}$$

- iv. Elevens strategi er riktig fordi eleven hele tiden utfører de samme operasjonene på begge sider av likhetstegnet.

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 = 13x - 10 \\
 -13x - 8 = -13x - 8 \\
 \frac{-18x}{-18} = \frac{-18}{-18} \\
 \boxed{x = 1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -5x + 8 = 13x - 10 \\
 -18x = -18 \\
 x = 1
 \end{array}$$

Eksamen V20 oppgave 8

a) Jeg har valgt ligning iii).

Begrunnelse: Ligningen er relativt enkel, og den ukjente er bare på den ene siden av likhetstegnet.

Løsning ved hjelp av gjett og sjekk:

$$x = 1:$$

$$\begin{array}{l} \text{Venstre side: } 4 \cdot x + 2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6 \\ \text{Høyre side: } 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Venstre side: } 4 \cdot x + 2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6 \\ \text{Høyre side: } 10 \end{array}} \right\} \text{forskjellig}$$

$$x = 2:$$

$$\begin{array}{l} \text{Venstre side: } 4 \cdot x + 2 = 4 \cdot 2 + 2 = 8 + 2 = 10 \\ \text{Høyre side: } 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Venstre side: } 4 \cdot x + 2 = 4 \cdot 2 + 2 = 8 + 2 = 10 \\ \text{Høyre side: } 10 \end{array}} \right\} \text{like}$$

Altså er $x = 2$ løsningen til ligningen.

Løsning ved hjelp av dekk over/finger-strategien:

$$4x + 2 = 10 \quad \text{fingertipp} + 2 = 10 \quad \overset{8}{\text{fingertipp}} + 2 = 10 \quad \overset{8}{\parallel} 4x + 2 = 10$$

$x = 2$

Det som er under fingeren må være lik 8. Dermed må $4x$ være lik 8. Hvis dette skal være sant, må x være lik 2.

b) Jeg har valgt ligning ii).

Begrunnelse: Den ukjente er på begge sider av likhetstegnet. Derfor er det vanskeligere å benytte uformelle strategier.

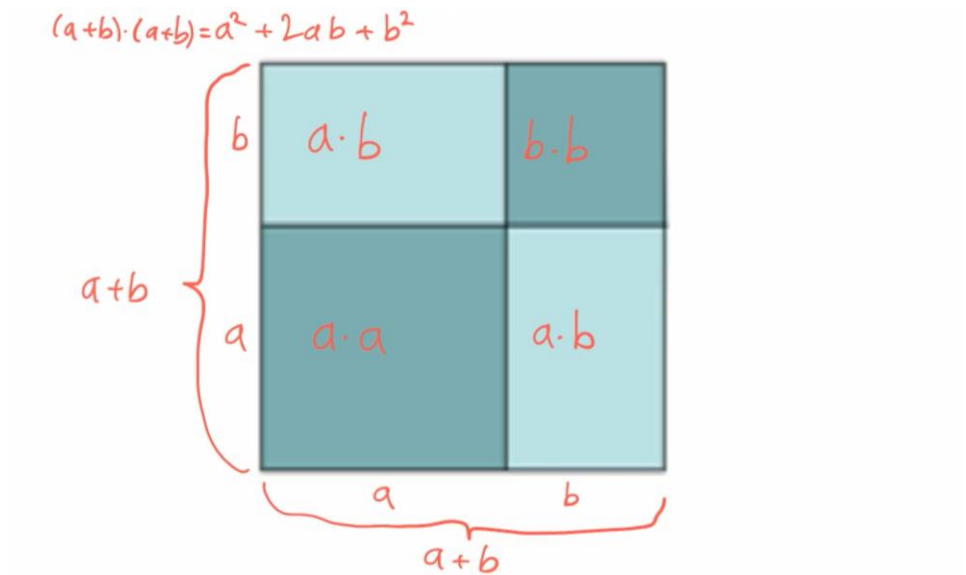
Her har jeg løst denne ligningen ved hjelp av en formell løsningsstrategi:

$$\begin{array}{r} 7x + 2 = 4x + 17 \\ 7x - 4x = 4x - 4x + 15 \\ 3x = 15 \\ \underline{3} \quad \underline{3} \\ x = 5 \end{array}$$

Eksamen V20 oppgave 9

Geometrisk:

Jeg viser den første kvadratsetningen ved å sette arealet av det store kvadratet lik summen av ulike delene av dette kvadratet.



Med tall:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a &= 3 \text{ og } b = 2 \\ (3+2)^2 &= 5^2 = 25 \\ 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 &= 9 + 12 + 4 = 25\end{aligned}$$

Med variable:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) \stackrel{\text{Den distributive loven}}{=} a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Den kommutative loven for multiplikasjon

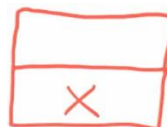
Økt 5

Eksempeloppgave H19 oppgave 2

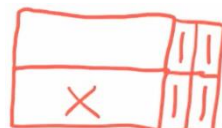
- a) i) Jeg begynner med å tegne det tallet man tenkte på som følgende rektangel:



Så dobler jeg tallet. Dette visualiserer jeg ved å tegne et likt rektangel over det første rektangelet jeg tegnet:



Så legger jeg til 4. Dette visualiserer jeg ved å legge til fire enere:



Så deler jeg på 2. Dette visualiserer jeg ved å ta bort den øverste halvparten av figuren:



Så trekker jeg fra 1. Dette visualiserer jeg ved å ta bort en ener:



Dermed blir svaret $x + 1$, det vi si: Etter at alle regneoperasjonene er utført, får jeg én mer enn det tallet jeg opprinnelig tenkte på.

- ii) Jeg kaller tallet jeg tenker på for x og utfører alle regneoperasjonene. Da får jeg:

$$\frac{2x + 4}{2} - 1$$

Så forenkler jeg dette uttrykket:

$$\frac{2x + 4}{2} - 1 = \frac{2(x + 2)}{2} - 1 = (x + 2) - 1 = x + 1$$

Da ender jeg opp med $x + 1$, som er én mer enn det tallet jeg opprinnelig tenkte på.

- b) Jeg kaller det tallet jeg tenker på for x .

Jeg bestemmer meg for at alle elevene skal komme frem til tallet 5. Derfor begynner jeg med 5. Dette skriver jeg som $\frac{10}{2}$. Så legger jeg til og trekker fra $2x$. Så skriver jeg $\frac{2x}{2}$ på egen brøkstrek og forkorter de to to-tallene. Da ender jeg opp med $\frac{2x+10}{2} - x$.

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{10}{2} = \frac{2x + 10 - 2x}{2} = \\ &\frac{2x + 10}{2} - \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2}} = \\ &\frac{2x + 10}{2} - x \end{aligned}$$

Oppsummering: Nå har jeg ganget det tallet jeg tenkte på med 2. Jeg har lagt til 10, og jeg har delt resultatet på 2. Til slutt trakk jeg fra det tallet jeg tenkte på. Da vil jeg alltid stå tilbake med 5 fordi det var 5 jeg begynte med.

Eksamen V20 oppgave 2

- a) Jeg kaller det tallet man tenker på for x og oversetter «tenk på et tall-oppgaven» til algebraiske symboler. Så trekker jeg sammen uttrykket og får x , som er det tallet man tenkte på.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x+4}{2} \right) \cdot 3 - 2x - 6 = \\ & \frac{2(x+2) \cdot 3}{2} - 2x - 6 = \\ & (x+2) \cdot 3 - 2x - 6 = \\ & 3x + 6 - 2x - 6 = x \end{aligned}$$

Er lik

- b) Jeg kaller det tallet man tenker på for x .

Jeg bestemmer meg for at alle elevene skal komme frem til tallet 3. Derfor begynner jeg med 3. Dette skriver jeg som $\frac{6}{2}$. Så legger jeg til og trekker fra $2x$. Så skriver jeg $\frac{2x}{2}$ på egen brøkstrek og forkorter de to to-tallene. Da ender jeg opp med $\frac{2x+6}{2} - x$.

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{6}{2} = \frac{2x+6-2x}{2} = \\ & \frac{2x+6}{2} - \frac{2x}{2} = \\ & \frac{2x+6}{2} - x \end{aligned}$$

Dermed blir «tenk på et tall»-oppgaven min som følger:

- Tenk på et tall
- Multipliser tallet med 2
- Legg til 6
- Del svaret på 2
- Trekk fra det tallet du opprinnelig tenkte på

Eksempeloppgave H19 oppgave 3

a) Jeg går gjennom strategiene linje for linje for å sjekke om de er riktige.

Strategi 1:

Strategi 1
$\frac{1}{4} \cdot 4(5x - 11) = 16 \cdot \frac{1}{4}$ $5x - 11 = 4$ $5x = 15$ $x = 3$

$$\begin{array}{r} 4(5x - 11) = 16 \\ \hline 4 \qquad \qquad 4 \\ 5x - 11 = 4 \\ \qquad +11 \qquad +11 \\ 5x = 15 \\ \hline 5 \qquad \qquad 5 \\ x = 3 \end{array}$$

Jeg ser at elevens strategi er riktig.

Strategi 2:

brukt i løsning av oppgaven.

Strategi 2
$4 \cdot 4(5x - 11) = 16 \cdot 4$ $\frac{16(5x - 11)}{16} = \frac{16 \cdot 4}{16}$ $5x - 11 = 4$ $\begin{array}{r} +11 \quad +11 \\ \hline 5x = 15 \end{array}$ $x = 3$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 4(5x - 11) = 16 \cdot 4 \\ \hline 16(5x - 11) = 16 \cdot 4 \\ \hline 16 \qquad \qquad 16 \\ 5x - 11 = 4 \\ \qquad +11 \qquad +11 \\ 5x = 15 \\ \hline 5 \qquad \qquad 5 \\ x = 3 \end{array}$$

Jeg ser at elevens strategi er riktig.

Strategi 3:

Strategi 3
$4(5x - 11) = 16$ $9x - 11 = 16$ $\begin{array}{r} +11 \quad +11 \\ \hline 9x = 27 \end{array}$ $\frac{9x}{9} = \frac{27}{9}$ $x = 3$

$$\begin{array}{r} 4(5x - 11) = 16 \\ \hline 9x - 11 = 16 \\ \hline 9x = 27 \\ \hline 9 \qquad \qquad 9 \\ x = 3 \end{array} \quad \text{gal overgang}$$

Overgangen mellom linje 1 og linje 2 er gal. Her skulle eleven ganget sammen 4 og 5x, og deretter trukket fra 4 ganger 11. I stedet har eleven lagt sammen 4 og 5 og skrevet svaret som 9x. Videre har 11 ikke blitt ganget med 4. Resten av løsningen er riktig.

Strategi 4:

Strategi 4
$4(5x - 11) = 16$ $\frac{20x}{20} - \frac{44}{20} = \frac{16}{20}$ $+ \frac{44}{20} + \frac{44}{20}$ $x = \frac{60}{20}$ $x = 3$

$$4(5x - 11) = 16$$
$$\frac{20x - 44}{20} = \frac{16}{20}$$
$$\frac{20x}{20} - \frac{44}{20} = \frac{16}{20}$$
$$x - \frac{44}{20} = \frac{16}{20} + \frac{44}{20}$$
$$x = \frac{60}{20}$$
$$x = 3$$

Jeg ser at elevens strategi er riktig.

Strategi 5:

Strategi 5
$\frac{4}{4} \frac{(5x - 11)}{4} = \frac{16}{4}$ $\frac{5x}{4} - \frac{11}{4} = 4$ $+ \frac{11}{4} + \frac{11}{4}$ $\frac{5x}{4} = \frac{28}{4}$ $x = 3$

$$4(5x - 11) = 16$$
$$5x - 11 = 4$$

Overgangen mellom linje 1 og 2 i elevens løsning er feil fordi nevnerne på venstresiden av likhetstegnet i linje 2 ikke skulle ha vært der. Når man deler med 4 på begge sider av likhetstegnet, er det hele produktet « $4(5x - 11)$ » som skal deles på 4 som vist ovenfor med rød skrift. Når man forkorter de to 4-tallene som vist med blå skrift, forsvinner nevneren i brøken. Derfor blir det feil å føre opp denne nevneren slik som eleven har gjort.

I linje 3 legger eleven til $\frac{11}{4}$ på begge sider av likhetstegnet, men $4 + \frac{11}{4}$ regnes feilaktig ut som $\frac{15}{4}$. Resten av elevens utregning er riktig.

b) Påstand i) er usann. Hvis vi velger forskjellige tall for x og y, får vi ikke likhet i « $5 + x = 5 + y$ ».

Påstand ii) er usann. Hvis vi velger like tall for x og y, får vi likhet i « $5 + x = 5 + y$ ».

Påstand iii) er sann fordi vi får likhet ved å velge like tall for x og y, og vi får ikke likhet ved å velge forskjellige tall for x og y.

c) Påstand i) er usann. Dette kan man se ved å sette $a = 0$. Da får man ikke likhet i « $3a - 4 = 3a + 4$ ».

Påstand ii) er sann. Ved å trekke fra $3a$ på begge sider av likhetstegnet, får vi at $-4 = 4$, noe som aldri er oppfylt.

Påstand iii) er usann fordi jeg nettopp har vist at man aldri kan få likhet i « $3a - 4 = 3a + 4$ »

d) Her er feilene Emma har gjort:

• Glemte å gange sammen 2 og -3 $2(x-3) > \frac{5}{2}x + 8$

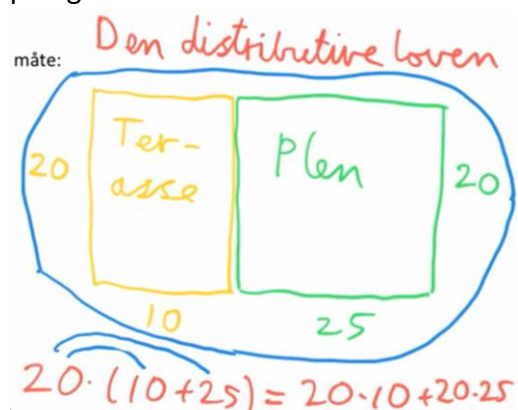
• Ikke byttet fortegn på -3 $2x - 3 > \frac{5}{2}x + 8$

• Smer ikke ulikhetstegnet når ganger med -2 $2x - \frac{5}{2}x > 8 - 3$

$-\frac{1}{2}x > 5$

$x > -10$

Den første feilen handler om den distributive loven: Når et tall skal ganges med en parentes, skal tallet ganges med begge tallene i parentesen. Dette kan jeg forklare for Emma ved hjelp av et praktisk eksempel. Jeg skal beregne arealet av hagen min som består av både en terrasse og en plen. Dette arealet kan beregnes på to måter som vist på figuren nedenfor.



Den andre feilen kan forklares ved å legge til 3 på begge sider.

Den tredje feilen kan forklares ved å legge til $\frac{1}{2}x$ på begge sider, trekke fra 5 på begge sider, gange med 2 på begge sider og snu ulikheten.

$-\frac{1}{2}x > 5$

$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x > 5 + \frac{1}{2}x$

$0 > 5 + \frac{1}{2}x$

$-5 > \frac{1}{2}x$

$\frac{1}{2}x < -5 \cdot 2$

$x < -10$

- e) Den første overgangen i utregning 1 er feil. Man kan hjelpe eleven ved å sette $x = 1$ og $y = 1$ og se at man får forskjellige verdier på hver side av likhetstegnet.

$$\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x} + \frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y}$$

$x=1, y=1$
 Venstre side: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
 Høyre side: $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

forskjellige verdier

Økt 6

Eksamen V20 oppgave 6

$$2(x-3) < -1$$

$$(x-3) < -1-2$$

Her er 2-tallet flyttet over på den andre siden av ulikhetstegnet med motsatt fortegn.

$$2(x-3) < -1-2$$

$$2(x-3) < -1-2$$

Hvis man skal bli kvitt «2» på venstresiden av ulikhetstegnet, må man dele på 2 på begge sider. Men eleven har ikke delt på 2 på høyresiden.

Der har eleven trukket fra 2. Dermed er elevens løsning feil, fordi hen ikke gjør samme operasjon på begge sider av ulikhetstegnet.

$$x-3 < -3$$

$$x > -3$$

Her er overgangen mellom de to linjene er feil fordi man må legge til 3 på begge sider for å bli kvitt «-3» på venstresiden, men på høyresiden deler eleven på -3. Dette er feil, fordi man ikke gjør samme operasjon på begge sider av ulikhetstegnet.

Eksamen V20 oppgave 3

- Trines påstand er feil fordi $5+t$ alltid er størst, også når t er en brøk eller et negativt tall.
- Man kan vise at Nils sin påstand er feil ved å sette $t = -2$.
- Man kan vise at Kristinas påstand er riktig ved å tegne grafene.
- Mike sin påstand er feil fordi han setter inn forskjellige verdier for t .

Eksamen V20 oppgave 7

a)

Beskriv alle svarmulighetene A–D med algebraiske uttrykk. Avgjør hvilken av svarmulighetene som er riktig svar på oppgaven.

$$A: (y+1) \cdot x$$

$$B: x \cdot 1 \text{ og } y \cdot 1$$

$$C: x+y+1$$

$$D: xy+1 \text{ Riktig svar på oppgaven}$$

Hva betyr uttrykket $xy + 1$?

- Ⓐ Legg 1 til y , gang så med x .
- Ⓑ Gang x og y med 1.
- Ⓒ Legg sammen x og y , legg så til 1.
- Ⓓ Gang x med y , legg så til 1.

- b) Jeg har valgt svarmulighet C: «Legg sammen x og y , legg så til 1». Elever som har valgt dette svaralternativet kan ha tenkt at «Legg sammen x og y » betyr at man skal skrive « xy ». Dette er feil fordi « xy » betyr « x ganger y ». Så har de lest « $+1$ » og tenkt at dette betyr at man skal legge til 1. Denne siste delen av elevens resonnerement er riktig.

Eksamen H19 oppgave 3

- a) Ola resonnerer ikke riktig. Det kan vi se ved å sette $a = 1$ og $b = 2$ inn i de to uttrykkene $5a + 3b$ og $8ab$. Da får vi forskjellige verdier for de to uttrykkene som vist nedenfor.

$$a=1 \quad b=2$$

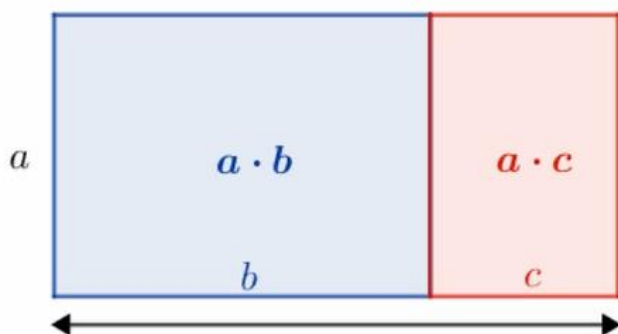
$$5a + 3b = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$$

$$8ab = 8 \cdot 1 \cdot 2 = 16$$

} forskjellige
verdier

Poenget her er at variablene a og b ikke står for forkortelser for ordene appelsiner og bananer eller objektene appelsiner og bananer, men at de for eksempel kan stå for kiloprisen på appelsiner og kiloprisen på bananer.

- b) Jeg regner først ut arealet av hele rektangelet (måte 1). Så regner jeg ut arealene av det blåe rektangelet og det røde rektangelet, og legger sammen disse (måte 2). Jeg setter de to uttrykkene jeg da får lik hverandre, og dermed har jeg vist den distributive loven.



Måte 1: $a \cdot (b + c)$ } $b + c$
 Måte 2: $a \cdot b + a \cdot c$ } Disse verdiene er like
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- c) Hvis vi har en felles faktor over og under brøkstreken, kan vi forkorte denne faktoren (se figuren med rød skrift), men det er ingen regel som sier at vi har lov til å forkorte ledd mot ledd slik som eleven gjør i denne oppgaven (se figuren med svart skrift).

$$\frac{16 \cdot x}{16 \cdot y}$$

$$\frac{4x - 16}{x^2 - 16}$$

Den andre feilen eleven gjør at hen tror at $x^2 = x + x$. Dette stemmer ikke. Den riktige betydningen av x^2 er at $x^2 = x \cdot x$.

Den tredje feilen eleven gjør er at hen forkorter $x + x$ over brøkstreken mot $x + x$ under brøkstreken. Dette er feil fordi vi ikke har lov til å forkorte ledd mot ledd på denne måten.

- d) Jeg faktoriserer først telleren. Så faktoriserer jeg nevneren ved hjelp av konjugatsetningen som vist nedenfor. Deretter kan jeg forkorte $x - 4$ over og under

brøkstreken.

$$4x - 16 = 4 \cdot x - 4 \cdot 4 = 4 \cdot (x - 4)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4) \cdot (x + 4)$$

$$\text{Konjugatsetningen: } (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{4x - 16}{x^2 - 16} = \frac{4 \cdot \cancel{(x - 4)}}{\cancel{(x - 4)} \cdot (x + 4)} = \frac{4}{x + 4}$$

Eksamen V20 oppgave 5

Oppgave 1: Her kreves det ikke at elevene skal vise at de kan tenke både algebraisk og geometrisk. Slik oppgaven er formulert vil et tilfredsstillende svar være å beskrive én måte å finne skjæringspunktet. Elevene blir da ikke utfordret til å kombinere ulike representasjoner når de beskriver fremgangsmåten sin. Denne oppgaven er dermed lite egnet for lærerens formål.

Oppgave 2: En elev kan svare riktig ved å tegne grafene til de to linjene og konkludere med at linjene er parallelle og således ikke har noe skjæringspunkt. Det er dermed ikke nødvendig å tenke algebraisk for å løse oppgaven. Her kreves det altså ikke at elevene skal vise at de kan tenke både algebraisk og geometrisk. Denne oppgaven er dermed lite egnet for lærerens formål.

Oppgave 4: Her kreves det ikke at elevene skal vise at de kan tenke både algebraisk og geometrisk. Elevene kan bygge på kunnskapen sin om å løse likninger algebraisk uten å tenke geometrisk. Denne oppgaven er dermed lite egnet for lærerens formål.

Oppgave 3: Her må elevene ha forståelse både for betydningen av parameterne a og b , og hvordan både verdi og fortegn til disse henger sammen med grafene geometrisk. Denne oppgaven vil utfordre elevene både geometrisk og algebraisk. Denne oppgaven er dermed best egnet for lærerens formål.