

Løsningsforslag nasjonal deleksamen MA103 1-7

Innhold

Hvordan bruke løsningsforslagene?	2
Økt 1	2
Eksempeloppgave V20 oppgave 1.....	2
Eksempeloppgave V20 oppgave 6.....	3
Eksempeloppgave V20 oppgave 7.....	4
Økt 2	7
Oppgave om utledning av formelen for trekanttnall	7
Eksempeloppgave H19 oppgave 1	9
Økt 3	11
Eksamen V20 oppgave 7	11
Eksempeloppgave H19 oppgave 5	12
Eksamen V20 oppgave 5	13
Økt 4	16
Eksempeloppgave V20 oppgave 3.....	16
Eksempeloppgave V20 oppgave 2.....	17
Eksempeloppgave H19 oppgave 3	18
Eksempeloppgave H19 oppgave 4	19
Økt 5	20
Eksamen V20 oppgave 1	20
Eksamen V20 oppgave 3	22
Eksempeloppgave H19 oppgave 6	23
Eksempeloppgave V20 oppgave 4.....	24
Økt 6	25
Eksamen V20 oppgave 2	25
Eksamen V20 oppgave 6	26
Eksempeloppgave V20 oppgave 5.....	27
Eksempeloppgave H19 oppgave 2	28
Eksamen V20 oppgave 4	29
Eksamen V20 oppgave 8	30

Hvordan bruke løsningsforslagene?

Hvis det er noe du ikke forstår i et løsningsforslag, anbefaler jeg at du ser på den videosnutten som er laget til oppgaven.

Jeg har skrevet løsningsforslagene på en slik måte at dere kan bruke dem som modell for deres egne eksamensbesvarelser med tanke på hvor detaljerte besvarelsene skal være og hvor mye svarene skal begrunnes, men noen ganger kan løsningsforslagene være mer detaljerte enn det som forventes på eksamen.

Økt 1

Eksempeloppgave V20 oppgave 1



- a) Vi tenker oss at Siri står på 100 meters høyde, se figuren. Morten skal være 50 meter høyere enn Siri. Derfor tegner jeg inn Morten på 150 meters høyde. Miriam befinner seg på den dobbelte av Siris høyde. Da Siris høyde er 100 meter, må Miriams høyde være 200 meter.

En annen mulighet er at Siri er på 150 meters høyde, se figuren. Morten skal være 50 meter høyere enn Siri. Derfor tegner jeg inn Morten på 200 meters høyde. Miriam befinner seg på den dobbelte av Siris høyde. Da Siris høyde er 150 meter, må Miriams høyde være 300 meter.

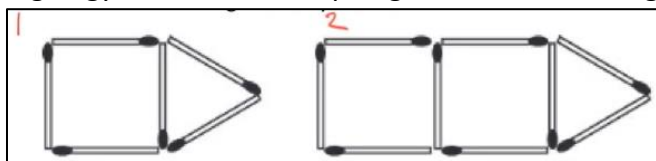
En tredje mulighet er at Siri er på 50 meters høyde, se figuren. Morten skal være 50 meter høyere enn Siri. Derfor tegner jeg inn Morten på 100 meters høyde. Miriam befinner seg på den dobbelte av Siris høyde. Da Siris høyde er 50 meter, må Miriams høyde også være 100 meter.

- b) Det er fullt mulig at Morten og Miriam står på den samme høyden, for det har jeg vist i figuren, se den svarte ringen i figuren over.

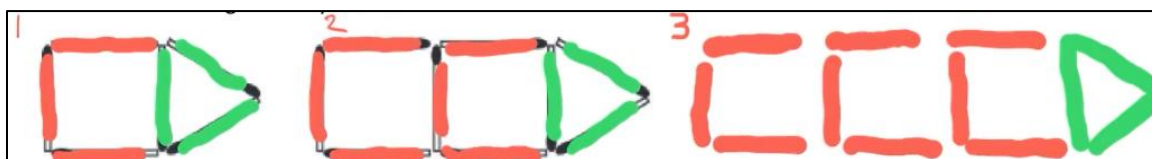
Eksempeloppgave V20 oppgave 6

Jeg skal avgjøre om påstanden er rett eller gal ved å lage en formel for hvor mange fyrstikker det er i de ulike figurene i fyrstikkmønsteret.

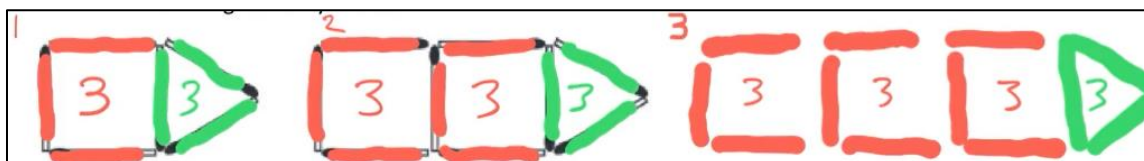
Jeg begynner med å føre på figurnummerne, se figuren nedenfor:



Så må jeg prøve å finne et mønster. I figur 1 har jeg 1 kvadrat som jeg merker med rødt, og i figur 2 har jeg 2 kvadrater som jeg merker med rødt, se figuren nedenfor. I tillegg har hver figur en trekant som jeg merker med grønt. Tilsvarende blir det i figur 3.



For å lage et kvadrat bruker jeg 3 fyrstikker. Derfor skriver jeg 3 inni alle kvadratene, se figuren nedenfor. For å lage en trekant bruker jeg 3 fyrstikker. Derfor skriver jeg 3 inni alle trekantene.



Dermed trenger jeg:

$3 \cdot 1 + 3$ fyrstikker for å lage figur 1

$3 \cdot 2 + 3$ fyrstikker for å lage figur 2

$3 \cdot 3 + 3$ fyrstikker for å lage figur 3

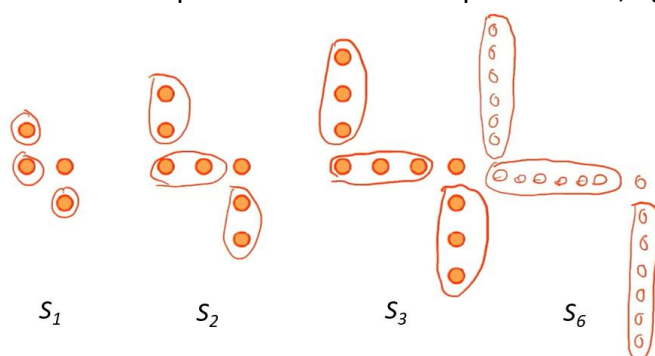
For å tydeliggjøre hva som skjer, har jeg merket alle figurnummerne med gult. Hvor mange fyrstikker trenger jeg så for å lage n kvadrater? Jo, nå er figurnummeret n . Derfor skriver jeg n istedenfor tallene som er merket med gult. Da kommer jeg frem til følgende formel:

$3 \cdot n + 3$ fyrstikker for å lage figur n

Siden dette er den samme formelen som i påstanden, er påstanden riktig.

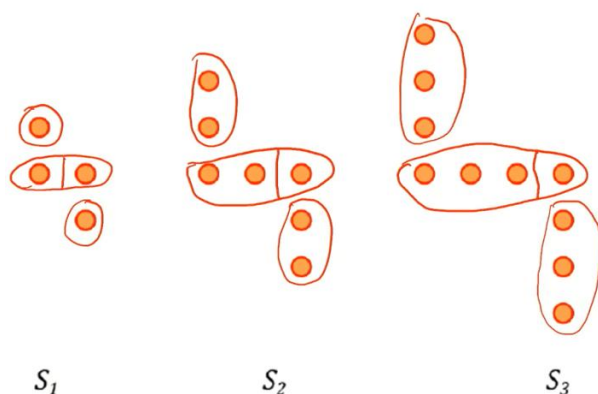
Eksempeloppgave V20 oppgave 7

- a) Av figuren nedenfor ser jeg at hvert stoltall består av tre «striper» som inneholder like mange prikker som figurnummeret. I tillegg er det én prikk ekstra. S_6 består dermed av 3 striper som inneholder 6 prikker hver, og en prikk ekstra.



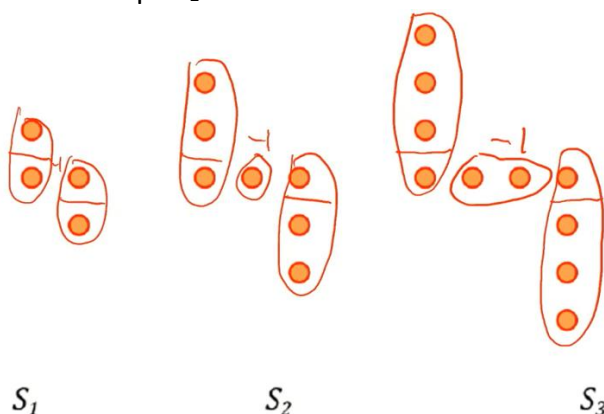
- b) $S_n = 2n + (n + 1)$:

Hvert stoltall består av 3 striper som vist på figuren nedenfor. « $2n$ » står for 2 striper der hver stripe inneholder like mange prikker som figurnummeret. « $n + 1$ » står for en stripe som inneholder en prikk mer enn figurnummeret. Dette har jeg markert ved å tegne en loddrett strek som skiller den ekstra prikken fra resten av stripen.



- $S_n = 2(n + 1) + n - 1$:

Hvert stoltall består av 3 striper som vist på figuren nedenfor. « $2(n + 1)$ » står for 2 striper der hver stripe inneholder en prikk mer enn figurnummeret. « $n - 1$ » står for en stripe som inneholder en prikk mindre enn figurnummeret. Dette har jeg symbolisert ved å skrive «-1» over denne stripen. Legg merke til at denne stripen har blitt borte på S_1 .



Jeg viser at disse formlene er algebraisk like ved å trekke sammen og forenkle hver formel så mye som mulig:

$$S_n = 2n + (n+1) =$$

$$2n + n + 1 =$$

$$\boxed{3n + 1}$$

$$S_n = 2(n+1) + n - 1 =$$

$$2n + 2 + n - 1 =$$

$$\boxed{3n + 1}$$

- c) Jeg tar utgangspunkt i formelen $3n + 1$ som jeg kom frem til i oppgave b). Dette uttrykket må være mindre eller lik 131, fordi jeg bare har 131 prikker til rådighet. Dermed får jeg ulikheten som er vist nedenfor. Jeg løser ulikheten og får at n må være mindre eller lik $43\frac{1}{3}$. Da n må være et helt tall, er stoltall nummer 43 det største jeg kan lage.

$$3n + 1 \leq 131$$

$$3n + 1 - 1 \leq 131 - 1$$

$$\frac{3n}{3} \leq \frac{130}{3}$$

$$n \leq 43\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{43}}$$

- d) Jeg begynner med å gi tallfølgen et navn: $P_1 = 2$, $P_2 = 7$, $P_3 = 15$ og $P_4 = 26$. I oppgaven er det gitt et hint om å bruke kvadrattall og trekantall. Derfor tegner jeg opp de fire første kvadrat- og trekantallene som vist nedenfor. Da ser jeg at hvert av tallene i følgen er summen av et kvadrattall og et trekantall:

The diagram shows two columns of dots representing square numbers (K_n) and triangular numbers (T_n). Red lines connect each P_n to its constituent K_n and T_n .

$K_1=1$	$K_2=4$	$K_3=9$	$K_4=16$	$T_1=1$	$T_2=3$	$T_3=6$	$T_4=10$
$P_1=2=1+1$				$P_2=7=4+3$			
$P_3=15=9+6$				$P_4=26=16+10$			
$P_1=K_1+T_1$				$P_2=K_2+T_2$			
$P_3=K_3+T_3$				$P_4=K_4+T_4$			

Altså er $P_n = K_n + T_n$. Vi vet at $K_n = n \cdot n = n^2$. Fra «Oppgave om utledning av formelen for trekantall» (den neste oppgaven) vet vi at $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Altså er:

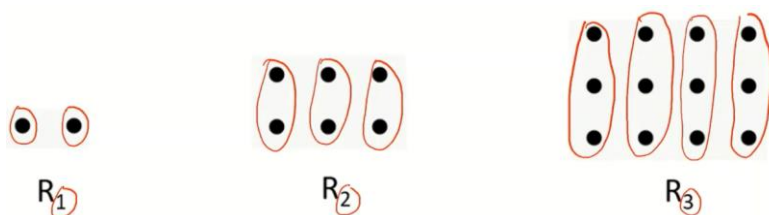
$$P_n = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 \cdot n^2}{2} + \frac{n^2+n}{2} = \frac{2n^2+n^2+n}{2} = \frac{3n^2+n}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$P_n = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Økt 2

Oppgave om utledning av formelen for trekantall

a) Ved å studere rektangetallene finner jeg følgende mønster:

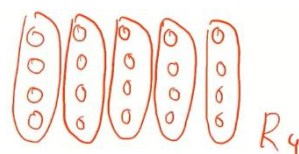


I R_1 er det 2 striper, det vil si én mer en figurnummeret. Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.

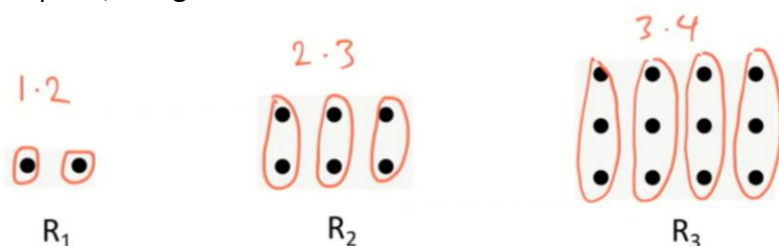
I R_2 er det 3 striper, det vil si én mer en figurnummeret. Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.

I R_3 er det 4 striper, det vil si én mer en figurnummeret. Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.

Da mønsteret fortsetter på den samme måten, er det 5 striper i R_4 . Hver av disse stripene har like mange prikker som figurnummeret.



b) Jeg finner antall prikker i et rektangeltall ved å gange antall striper med antall prikker i stripene, se figuren nedenfor:

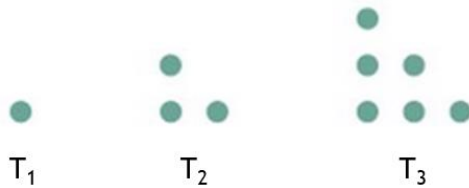


Antall prikker i en stripe i figur n er figurnummeret, det vil si n .

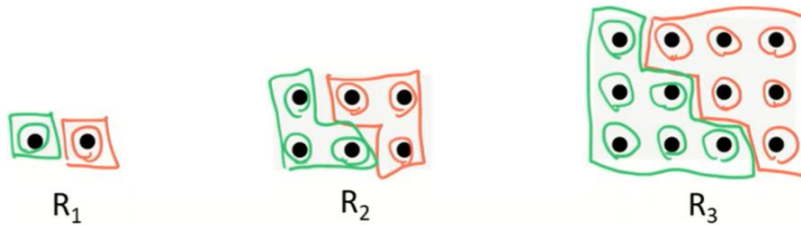
Antall striper i figur n er én mer enn figurnummeret, det vil si $n + 1$.

Jeg lar R_n stå for antall prikker i det n 'te rektangeltallet. Da blir $R_n = n \cdot (n + 1)$.

c) Nedenfor har vi de tre første trekanttallene:



Dermed ser jeg at inndelingen kan gjøres på følgende måte:

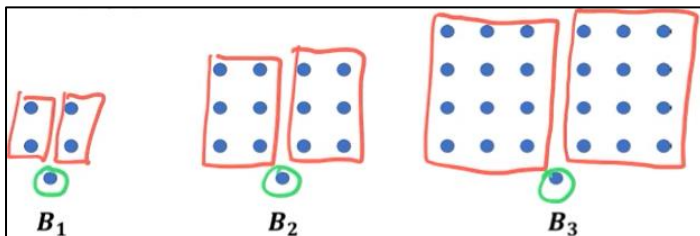


d) Fra figuren i oppgave c) ser jeg at $R_3 = 2 \cdot T_3$, $R_2 = 2 \cdot T_2$ og $R_1 = 2 \cdot T_1$. Da alle rektangeltallene er bygd opp på den samme måten, blir $R_n = 2 \cdot T_n$. Så setter jeg formelen $R_n = n \cdot (n + 1)$ inn denne relasjonen som vist nedenfor. Til slutt deler jeg på to på begge sider for å få T_n alene på venstresiden av likhetstegnet.

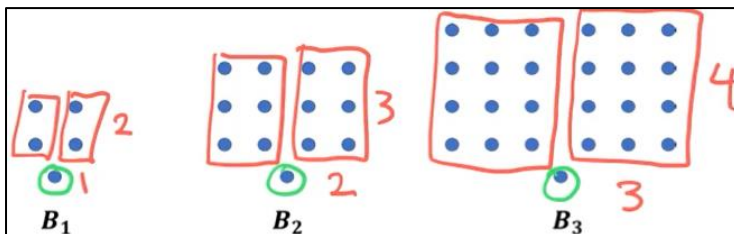
$$\begin{aligned}
 R_n &= 2 \cdot T_n \\
 2 \cdot T_n &= R_n \\
 \frac{2 \cdot T_n}{2} &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
 T_n &= \frac{n \cdot (n+1)}{2}
 \end{aligned}
 \qquad
 R_n = n \cdot (n+1)$$

Eksempeloppgave H19 oppgave 1

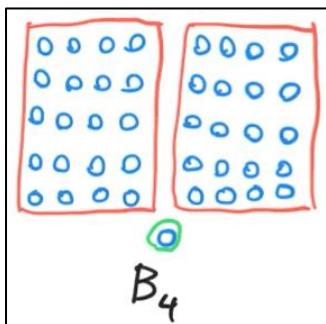
- a) Fordi mønsteret er komplekst, er det lurt å dele det opp i mindre figurer. Jeg synes det er enklest å begynne med den siste figuren, B_3 . Vi ser at denne figuren består av 2 rektangler og en prikk i midten, se figuren nedenfor. På samme måte består B_2 av 2 rektangler og en prikk i midten og B_1 av 2 rektangler og en prikk i midten.



I figuren nedenfor har jeg ført opp hvor mange prikker det er langs hver av sidene i alle rektanglene.

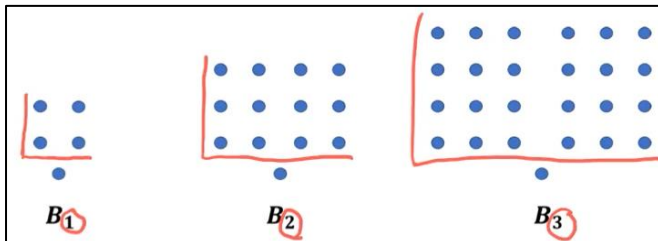


Hvordan er så balanse tallene bygd opp? Jo, vi har alltid to rektangler. I hvert av disse er bredden det samme som figurnummeret, og høyden er én mer enn figurnummeret. I tillegg er det en prikk i midten. Nå skal jeg bruke denne beskrivelsen for å tegne balansetall nr 4. Figurnummeret er nå 4. Derfor skal bredden på de to rektanglene være 4, og høyden skal være en mere enn 4 som er 5, se figuren nedenfor.



b) $B_n = 2n \cdot (n + 1) + 1$:

Hva betyr $2n$ i formel nr. 1? Bokstaven n står jo for figurnummeret. Dermed må $2n$ være det dobbelte av figurnummeret. Hvor i balansetallene finner jeg det dobbelte av figurnummeret? Av figuren nedenfor ser vi at $2n$ står for antall prikker i grunnlinjen (markert med en vannrett rød strek) i hver av de tre rektanglene.

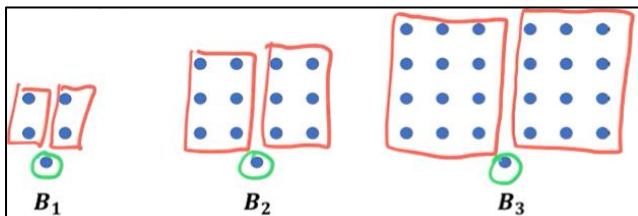


Hva betyr $(n+1)$ i formel nr. 1? Bokstaven n står jo for figurnummeret. Dermed må $n + 1$ være én mer enn figurnummeret. Hvor i balansetallene finner jeg én mer enn figurnummeret? Av figuren ovenfor ser vi at $n + 1$ står for antall prikker i høyden (markert med en rød loddrett strek) i hver av de tre rektanglene.

Hva betyr så $2n \cdot (n + 1)$ i formel nr. 1? Jo det står for antall prikker i de to rektanglene. Dermed må $2n \cdot (n + 1) + 1$ stå for antall prikker i balansetall nr. n .

$B_n = 1 + 2(n(n + 1))$:

n 'en står for figurnummeret som jeg finner igjen som antall prikker i grunnlinjene i de to rektanglene på hver side av prikken i midten, se figuren nedenfor. $(n+1)$ står for én mer enn figurnummeret. Dette jeg finner igjen som antall prikker i høydene til de to rektanglene på hver side av prikken i midten.



Når jeg ganger sammen n og $(n+1)$, får jeg antall prikker i rektanget på den ene siden av prikken i midten. Når jeg ganger sammen 2 og $n \cdot (n+1)$, får jeg antall prikker i begge rektanglene på hver side av prikken i midten. 1 -tallet står for den ene prikken i midten. Når jeg legger til 1 , får jeg dermed antall prikker i rektangeltall nr. n .

c) Jeg begynner med å forenkle formel nr. 1:

$$B_n = 2n \cdot (n + 1) + 1 = 2n^2 + 2n + 1$$

Så forenkler jeg formel nr. 2:

$$B_n = 1 + 2(n(n + 1)) = 1 + 2(n^2 + n) = 1 + 2n^2 + 2n = 2n^2 + 2n + 1$$

Da jeg har kommet frem til det samme uttrykket begge gangene, har jeg vist at de to formlene sier det samme.

Økt 3

Eksamen V20 oppgave 7

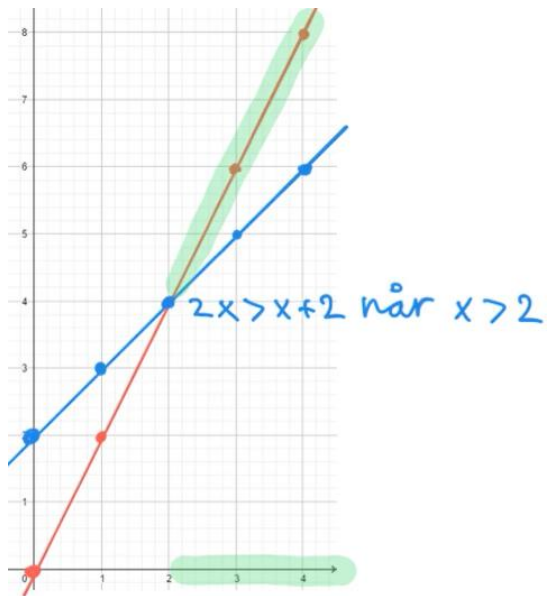
- a) I figur 3 er det 3 vertikale streker og 2 horisontale. Figur 4 følger det samme mønsteret: 4 vertikale streker og 3 horisontale. Dermed vil figur 5 inneholde 5 vertikale streker og 4 horisontale.
- b) I oppgave a) så vi at antall vertikale streker var det samme som figurnummeret, og at antall horisontale streker var én mindre enn figurnummeret. Hvis jeg kaller figurnummeret for n , blir da antall vertikale streker n og antall horisontale streker $n - 1$. Totalt antall streker i figur n blir da $n + (n - 1) = 2n - 1$.
- c) I oppgave b) fant jeg ut at antall vertikale streker var det samme som figurnummeret, og at antall horisontale streker var én mindre enn figurnummeret. Dermed er det 99 vertikale streker i figur 99, og 98 horisontale streker.
- d) Her er to eksempler på argumenter:
- I arbeid med figurtall arbeider man med å oppdage struktur og mønster, og å si noe generelt om mønstrenes utvikling, som er sentralt i arbeid med algebraisk tenkning.
 - I arbeid med figurtall finner man sammenhengen mellom figurnummeret og figurtallet, og finner på denne måten en relasjon mellom to mengder tall, og arbeid med figurtall er derfor en måte å arbeide med funksjonstenkning på.

Eksempeloppgave H19 oppgave 5

Jeg begynner med å lage en tabell:

x	0	1	2	3	4
2x	0	2	4	6	8
x+2	2	3	4	5	6

Så plotter jeg punktene i et koordinatsystem:



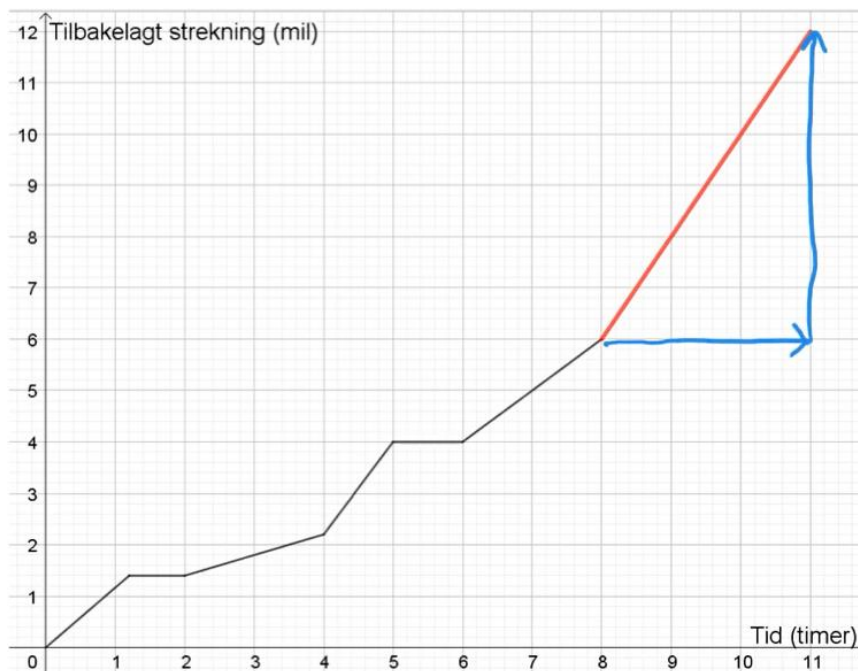
Fra koordinatsystemet ser jeg at den røde linja ($2x$) ligger over den blå linja ($x + 2$) når $x > 2$.
Altså er $2x > x + 2$ når $x > 2$. Tabellen viser også dette.

Eksamen V20 oppgave 5

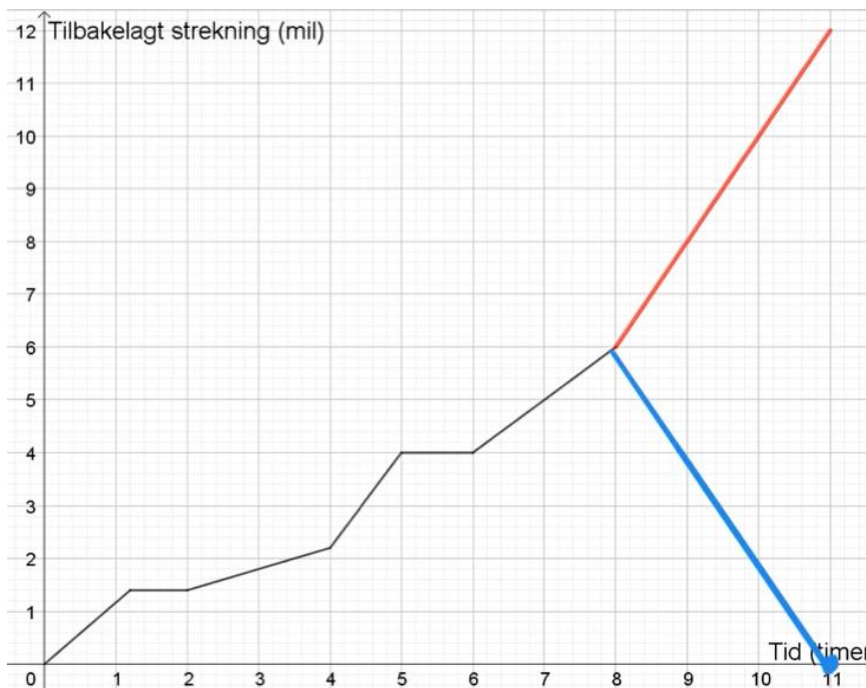
- a) Elevene sier at Dag Otto syklet raskest mellom 1,4 og 2,0 timer fordi grafen er kortest i dette tidsrommet. Dette er ikke riktig. Grafen er vannrett i dette tidsrommet, og det betyr at Dag Otto står i ro. Altså er elevenes resonnement feil. Det riktige svaret er at Dag Otto sykler raskest der hvor grafen stiger brattest fordi da endrer den tilbakelagte strekningen seg mest per tidsenhet. Vi ser at grafen stiger brattest mellom 4,0 og 5,0 timer.

Min gjetning er at elevene har tenkt på følgende måte: Dag Otto sykler raskest når han beveger seg parallelt med x-aksen, for da blir streken mellom to tidsrom kortest. Denne tankegangen vil aldri være gyldig. Fart er en sammensatt enhet, nemlig endring i strekning delt på endring i tid. Dermed kan man ikke bare studere en av aksenes utstrekning uten å ta hensyn til den andre aksen.

b) Jeg utvider grafen på følgende måte:



Begrunnelse: Dag Otto bruker 3 timer på å sykle hjem. Derfor må jeg bevege meg 3 enheter mot høyre på x-aksen (blå vannrett pil). Fordi Dag Otto har syklet 6 mil, må han også også sykle 6 mil for å komme hjem. Dermed må jeg bevege meg 6 enheter oppover på y-aksen (blå loddrett pil).



En vanlig misoppfatning som kan avdekkes når elevene skal skissere grafen til hjemturen, er at grafen ender ved y-verdien 0. Dette er en slags billedmessig tolkning, der elevene tenker at de skal tilbake til utgangspunktet.

c) **Påstand i:**

Jeg ganger sammen brøken og parentesen og får: $f(x) = \frac{4}{3}(x + 2) = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$. Nå har jeg skrevet funksjonsuttrykket til f på formen $y = ax + b$, der $a = \frac{4}{3}$ og $b = \frac{8}{3}$.
Dermed er f en lineær funksjon, og påstanden er sann.

Påstand ii:

Jeg finner skjæringspunktet med y -aksen ved å sette verdien $y = 0$ inn i funksjonsuttrykket til f . Da får jeg $f(0) = \frac{4}{3}(0 + 2) = \frac{8}{3}$. Da dette er forskjellig fra 43, er påstanden usann.

Påstand iii:

For å avgjøre om denne påstanden er sann løser jeg ulikheten $\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} &> 0 \\ \frac{4x}{3} + \frac{8}{3} &> 0 \\ \frac{4x}{4} + \frac{8}{4} &> \frac{0}{4} \\ x + 2 &> 0 \\ x &> -2 \end{aligned}$$

f har en positiv funksjonsverdi når ulikheten $\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} > 0$ er oppfylt. Denne ulikheten er oppfylt når $x > -2$. Dermed er denne ulikheten også oppfylt når $x > 0$. Altså er påstanden sann.

Eksempeloppgave V20 oppgave 2

- a) Jeg lar x stå for antall liter vann i vannkanna. $2x$ vil da stå for antall liter vann i de to kannene han bruker på å vanne tomatene, $3x$ for antall liter vann i de tre kannene han bruker på å vanne chilitrærne, og x for antall liter vann i den kannen han bruker på å vanne bønnene. Videre lar jeg 108 være antall liter vann han bruker på å vanne agurkplantene sine. Et spørsmål som passer til uttrykk I. kan da være: «En gartner skal vanne plantene i drivhuset sitt. Han bruker to kanner på å vanne tomatene, tre kanner på å vanne chilitrærne og en kanne på å vanne bønnene. I tillegg bruke han 108 liter til å vanne agurkplantene. Lag et uttrykk som beskriver hvor mange liter han har brukt til sammen.»
- b) Jeg lar x fortsatt stå for antall liter vann i vannkanna. $2x$ vil da stå for antall liter vann i de to kannene han bruker på å vanne tomatene, $3x$ for antall liter vann i de tre kannene han bruker på å vanne chilitrærne, og x for antall liter vann i den kannen han bruker på å vanne bønnene. Videre lar jeg 108 være antall liter vann han bruker på å vanne alle plantene sine til sammen. Et spørsmål som passer til ligning II. kan da være: «En gartner skal vanne plantene i drivhuset sitt. Han bruker to kanner på å vanne tomatene, tre kanner på å vanne chilitrærne og en kanne på å vanne bønnene. Til sammen har han brukt 108 liter vann. Hvor mange liter rommer en kanne med vann?»

Eksempeloppgave H19 oppgave 3

- a) Jeg begynner med å undersøke om det er likhet i den første overgangen, $\frac{x^2-x}{2x} = \frac{x}{2x}$. Nevnerne er like, men det to tellerne, $x^2 - x$ og x er forskjellige. Dette kan vi se ved å for eksempel sette $x = 1$ inn i de to tellerne. Da får vi $1^2 - 1 = 0$ og 1 . Da disse verdiene er forskjellige, er ikke de to nevnerne like. Den første overgangen er dermed feil. Den andre overgangen er riktig, for her har elevene forkortet det samme tallet over og under brøkstreken på riktig måte.

Korrekt løsning er:

$$\frac{x^2-x}{2x} = \frac{x \cdot (x-1)}{2x} = \frac{x-1}{2}$$

- b) **Begrunnelse for at overgangen fra linje 1 til linje 2 er riktig:**

Eleven trekker fra $\frac{7}{2}$ på begge sider av ligningen. Da forsvinner $\frac{7}{2}$ på venstresiden.

Videre regner eleven ut at $4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$, noe som også er riktig.

Begrunnelse for at overgangen fra linje 2 til linje 3 er riktig:

Eleven ganger begge sidene med 2 og $x + 3$ som vist under:

$$\frac{4 \cdot 2 \cdot (x+3)}{x+3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot (x+3)}{2}$$

Deretter gjennomfører eleven en korrekt forkortning som vist under:

$$\frac{4 \cdot 2 \cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{(x+3)}}{2}$$

Eleven står da tilbake med ligningen $x + 3 = 8$.

Begrunnelse for at overgangen fra linje 3 til linje 4 er riktig:

Eleven trekker fra 3 på begge sider og får at $x = 5$, noe som er en riktig utregning.

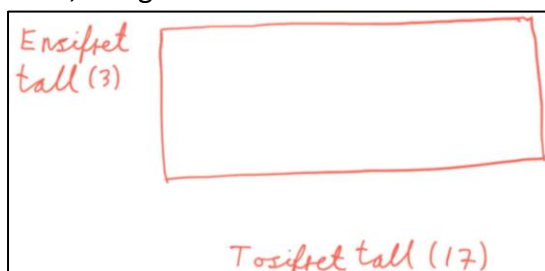
Konklusjon: Ligningen er riktig løst.

Eksempeloppgave H19 oppgave 4

- a) Jeg begynner med det korrekte tallet. Det skal stå 20 på den tomme plassen. En elev som har skrevet dette tallet kan ha tenkt på følgende måte: 19 pluss 13 er lik 32. Altså må det stå 20 på den tomme plassen for at summen skal bli lik på begge sidene av likhetstegnet.

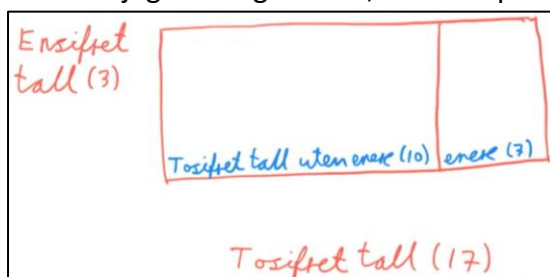
Jeg fortsetter med det ukorrekte tallet. Mange elever vil fylle inn 32 på den tomme plassen. De tolker likhetstegnet som en kommando, og tenker at svaret på addisjonsstykket $19 + 13$ skal fylles inn på den tomme plassen.

- b) For å løse denne oppgaven vil jeg bruke en visuell representasjon som er basert på areal, se figuren nedenfor:



Høyden i rektangelet er det ensifrede tallet, 3. Bredden av rektangelet er det tosifrede tallet, 17. Arealet av rektangelet blir da produktet av det ensifrede og tosifrede tallet, dvs $3 \cdot 17$.

Nå deler jeg rektangelet i to, som vist på figuren under:



Den lengste av de to grunnlinjene står for det tosifrede tallet uten enere, i dette tilfellet 10. Den korteste av de to grunnlinjene står for enerne, i dette tilfellet 7. Nå regner jeg ut arealet av hele rektangelet på en annen måte. Arealet av delrektangelet til venstre er det ensifrede tallet ganger det tosifrede tallet uten enere, dvs $3 \cdot 10$. Arealet av delrektangelet til høyre er det ensifrede tallet ganger enere i det tosifrede, dvs $3 \cdot 7$.

Nå har jeg regnet ut arealet av hele rektangelet på to forskjellige måter. Fordi jeg får samme svar ved begge måtene å regne ut arealet på, er strategien som presenteres i oppgave a) riktig. Jeg har tatt utgangspunkt i utregningen $3 \cdot 17$, men resonnementet mitt gjelder alle ensifrede og tosifrede tall. Derfor gjelder strategien alltid.

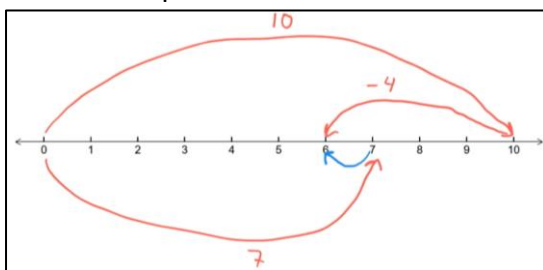
Økt 5

Eksamen V20 oppgave 1

- a) Et eksempel på en slik oppgave er: $10 - 4 = \underline{\quad} + 7$

Et vanlig feilsvar på denne oppgaven er 6. Elever som svarer dette, oppfatter likhetstegnet som en operator, og tenker at svaret på subtraksjonstykket $10 - 4$ skal fylles inn på den tomme plassen. Et annet feilsvar er 13. Elever som svarer dette, oppfatter også likhetstegnet som en operator. De regner først ut $10 - 4$ og får 6. Så legger de til 7 og skriver svaret 13 på den tomme plassen.

- b) Elevene tegner 10 tallet som en pil fra 0 til 10, se figuren under. Så tegner de «- 4» som en pil som begynner i 10, går 4 enheter mot venstre og slutter på 6. Så tegner de 7-tallet som en pil som fra 0 til 7. Elevene ser likhetstegnet og spør: Hvordan skal jeg tegne en pil som begynner i 7 slik at pilene over og under tallinja slutter i det samme punktet? Jo, da må pilen gå en enhet mot venstre (blå pil). Altså skal det stå «- 1» på den tomme plassen.



- c) Hilde ønsker at det skal stå 6 der hvor 10-tallet står, se figuren under. For å få til dette trekker hun fra 4 og legger til 4, se grønn skrift. Hun regner så ut $10 - 4$ og får 6 (markert med blå merkepenn i figuren). Hun setter $7 - 4$ inni en parentes, regner ut $7 - 4$ og får 3 som svar. Ut fra nederste linje ser hun da at det skal stå 3 på den tomme plassen, se de to gule sirklene. Altså er strategien hennes riktig. Hilde har ikke gjort utregningene i hodet så detaljert som jeg har gjort her, men dette er den matematiske begrunnelsen bak intuisjonen i resonnementet hennes.

Ønsker at det skal stå 6 her

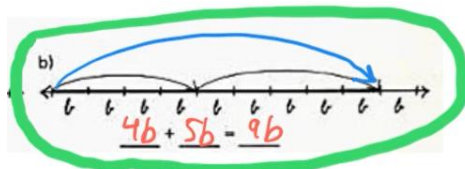
$$\begin{array}{l}
 \downarrow \\
 6 - _ = 10 - 7 \\
 6 - _ = 10 - 4 - 7 + 4 \\
 6 - _ = 6 - (7 - 4) \\
 6 - \textcircled{_} = 6 - \textcircled{3}
 \end{array}$$

Fredrik ser likhetstegnet og tenker at svaret på regnestykket $10 - 7$ skal stå på den tomme plassen. Denne strategien er feil fordi den bygger på en tanke om likhetstegnet som en operator, i stedet for å tenke at likhetstegnet betyr at det skal være samme verdi på begge sider av likhetstegnet.

Marit regner ut at $10 - 7$ er 3. Så finner hun ut at det må stå 3 på den tomme plassen for at regnestykket på høyreside av likhetstegnet også skal bli 3. Dette er en riktig strategi fordi den bygger på en tanke om at likhetstegnet betyr at det skal være samme verdi på begge sider av likhetstegnet.

Eksamen V20 oppgave 3

- a) Utsagn 1: Utsagnet blir sant hvis vi setter like verdier for a og b . Hvis vi setter forskjellige verdier for a og b , blir utsagnet usant. Derfor er utsagnet sant av og til.
Utsagn 2: Dette utsagnet er alltid usant fordi det er umulig å finne verdier for a slik at a og $a + 3$ blir et oddetall samtidig.
- b) Denne oppgaven er uheldig med hensyn på variabelbegrepet fordi bokstaven «b», «e» og «p» blir brukt som forkortelser for fysiske objekter. Dette kan legge til rette for objekttolkning, som går ut på at elevene tror at bokstavene står for fysiske objekter, og ikke for tall.
- c) En kontekstoppgave som passer til oppgave 19 b) er: «Ola kjøpte 4 kinobilletter. Etterpå gikk han og kjøpte 5 kinobilletter til. Hva kostet billettene til sammen?»
Denne oppgaven kan vi skrive med algebraiske symboler på følgende måte: Vi lar b stå for prisen for en kinobillett. Prisen for 4 kinobilletter blir da $4b$ (den første svarte pilen i figuren nedenfor), og prisen for 5 kinobilletter blir da $5b$ (den andre svarte pilen). Prisen for alle billettene til sammen blir da $9b$ (den blåe pilen).



I denne oppgaven er altså b en variabel som står for prisen av en kinobillett. Det betyr at vi ikke vet hva en kinobillett koster, men vi vet at alle kinobillettene koster det samme, og at Ola kjøpte 9 billetter totalt.

Eksempeloppgave H19 oppgave 6

Påstand 1: Denne påstanden er gal, og den er et uttrykk for en misoppfatning som kalles objektolkning. Denne misoppfatningen går ut på at elevene tror at symbolet for en variabel eller en ukjent står for en ting, og ikke et tall. I dette tilfellet tror elevene at bokstaven s står for en flaske saft og at bokstaven v står for en vaffel. Dette er feil. Bokstaven s står for prisen på en flaske saft, og bokstaven v står for prisen på en vaffel.

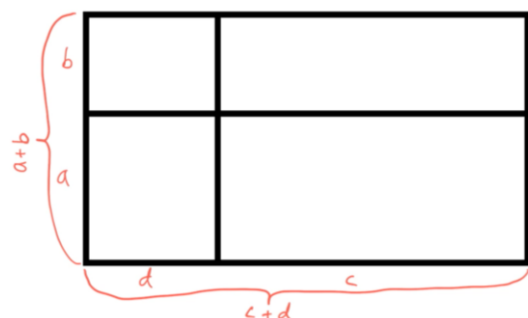
Påstand 2: Denne påstanden er riktig.

Påstand 3: Denne påstanden er gal, og den er et uttrykk for misoppfatningen som kalles objektolkning. Denne misoppfatningen har jeg forklart i forbindelse med påstand 1.

Påstand 4: Denne påstanden er riktig.

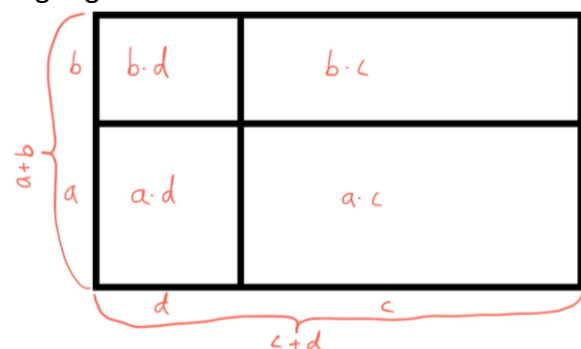
Eksempeloppgave V20 oppgave 4

Det første jeg må gjøre er å plassere bokstavene a , b , c og d som vist på figuren nedenfor:



Her har jeg valgt den lengste høyden som a og den korteste som b fordi a skulle være større enn b . Videre har jeg valgt den lengste bredden som c og den korteste som d fordi c skulle være større enn d . Lengden av hele høyden blir da $a + b$, og lengden av hele bredden $c + d$, se figuren over.

Jeg regner nå ut arealene av de fire delrektanglene, se figuren under.



Jeg kan nå regne ut arealet av hele rektangelet på to forskjellige måter:

- Jeg ganger sammen hele høyden og hele bredden på rektangelet: $(a + b)(c + d)$
- Jeg legger sammen arealene av de fire delrektanglene: $ac + bc + ad + bd$

Fordi begge måtene å regne arealet av hele rektangelet gir samme svar, har jeg at $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$, der $a > b$ og $c > d$.

Økt 6

Eksamen V20 oppgave 2

- a) Jeg kaller det tallet man tenker på for x og oversetter «tenk på et tall-oppgaven» til algebraiske symboler. Så trekker jeg sammen uttrykket og får x , som er det tallet man tenkte på.

Handwritten algebraic derivation showing the simplification of an expression to x . The steps are:

$$\left(\frac{2x+4}{2}\right) \cdot 3 - 2x - 6 =$$
$$\cancel{2} \cancel{(x+2)} \cdot 3 - 2x - 6 =$$
$$(x+2) \cdot 3 - 2x - 6 =$$
$$3x + 6 - 2x - 6 = x$$

A green arrow points from the final result x to the text "Er lik" (Is equal).

- b) Jeg kaller det tallet man tenker på for x .

Jeg bestemmer meg for at alle elevene skal komme frem til tallet 3. Derfor begynner jeg med 3. Dette skriver jeg som $\frac{6}{2}$, se utregningen til høyre. Så legger jeg til og trekker fra $2x$. Så skriver jeg $\frac{2x}{2}$ på egen brøkstrek og forkorter de to to-tallene. Da ender jeg opp med $\frac{2x+10}{2} - x$.

Handwritten algebraic derivation showing the simplification of an expression to x . The steps are:

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{2x+6-2x}{2} =$$
$$\frac{2x+6}{2} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} =$$
$$\frac{2x+6}{2} - x$$

Dermed blir «tenk på et tall»-oppgaven min som følger:

- Tenk på et tall
- Multipliser tallet med 2
- Legg til 6
- Del svaret på 2
- Trekk fra det tallet du opprinnelig tenkte på

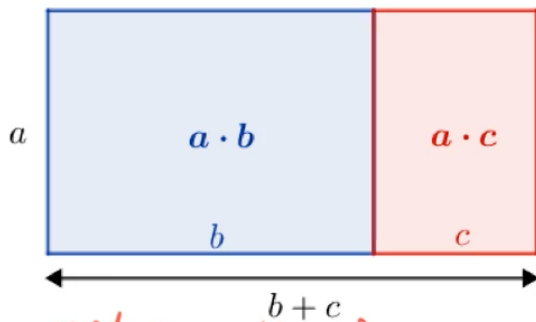
Eksamen V20 oppgave 6

- a) Eleven deler på 4 og ganger med fire som vist på figuren. Så regner eleven ut 12 delt på 4 og får 3. Så regner eleven ut 5 ganger 4 og får 20.

$$\frac{12}{4} \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 20$$

- b) Eleven bruker at 12 kan skrives som $10 + 2$. Så bruker eleven den distributive loven som sier at $a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$. Altså er $12 \cdot 5 = (10 + 2) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 2 \cdot 5$.

Begrunnelse for den distributive loven ved hjelp av en illustrasjon



Jeg skal regne arealet av hele rektangelet på to forskjellige måter:

Måte 1: Jeg ganger høyden a med hele grunnlinjen $b + c$, og får da: $a \cdot (b + c)$.

Måte 2: Jeg legger sammen arealene av det blå rektangelet ($a \cdot b$) og det røde rektangelet ($a \cdot c$) og får da $a \cdot b + a \cdot c$.

Da begge disse måtene gir arealet av hele rektangelet, har jeg vist at $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Eksempeloppgave V20 oppgave 5

- a) Jeg skriver 18 som $10 + 8$ og bruker så den distributive loven. Da får jeg:
 $18 \cdot 9 = (10 + 8) \cdot 9 = 10 \cdot 9 + 8 \cdot 9$.

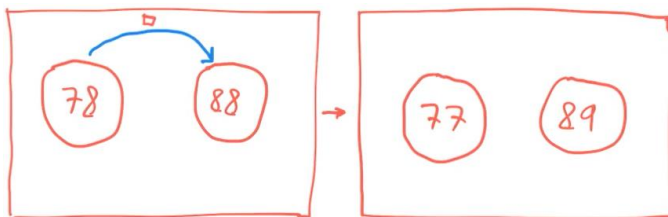
Jeg skriver 5 som $2 + 3$ og bruker så den distributive loven. Da får jeg:
 $7 \cdot 5 = 7 \cdot (2 + 3) = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3$.

Jeg bruker den kommutative loven og skriver $12 \cdot 11$ som $11 \cdot 12$. Så skriver jeg 12 som $7 + 5$ og bruker den distributive loven. Da får jeg:
 $12 \cdot 11 = 11 \cdot 12 = 11 \cdot (7 + 5) = 11 \cdot 7 + 11 \cdot 5$.

- b) Likheten er sann fordi det første tallet er redusert med 1, og det andre tallet er øket med 1. Fordi reduksjonen og økningen er den samme, blir summen uforandret.

Begrunnelse for at likheten er sann ved hjelp av en illustrasjon

Jeg ser for meg at jeg har to hauger med tellebrikker. I den første haugen har jeg 78 brikker, og i den andre 88, se figuren.



Så flytter jeg en tellebrikke fra den første haugen til den andre. I den første haugen blir det da 77 tellebrikker, og i den andre 89. Fordi jeg bare har flyttet en brikke fra den ene haugen til den andre, blir det totale antallet i begge haugene uforandret. Derfor er likheten sann.

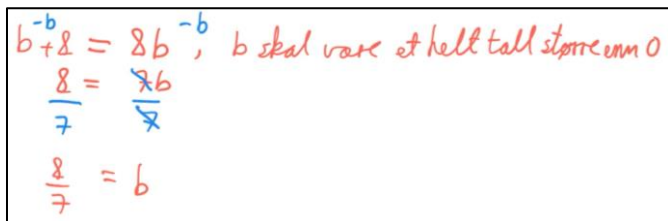
Eksempeloppgave H19 oppgave 2

Utsagn 1: Ved å sette $a = b$, blir utsagnet sant. Ved å sette $a \neq b$, blir utsagnet usant. Dermed er utsagnet sant av og til.

Utsagn 2: Ved å trekke fra $2a$ på begge sider av likhetstegnet, får jeg at $3 = -3$. Denne likheten er aldri oppfylt. Dermed er utsagnet alltid usant.

Utsagn 3: Jeg oversetter « a addert med $a + 3b$ » til algebraiske symboler. Da får jeg $a + a + 3b$. Jeg trekker sammen dette uttrykket og får da $2a + 3b$ som svar. Dermed er utsagnet alltid sant.

Utsagn 4: b addert med 8 betyr $b + 8$. Jeg skal nå se om det er mulig å finne et helt tall b som er større enn 0 slik at $b + 8 = 8b$. Jeg løser denne ligningen:



Handwritten algebraic solution for the equation $b + 8 = 8b$. The text is written in red and blue ink. It shows the equation $b + 8 = 8b$ with a minus sign above the b on the right side. Below this, the 8 is divided by 7 to get $\frac{8}{7}$, and the $8b$ is crossed out with a blue X . The final result is $\frac{8}{7} = b$.

$$b + 8 = 8b, \text{ } b \text{ skal være et helt tall større enn } 0$$
$$\frac{8}{7} = \cancel{8b}$$
$$\frac{8}{7} = b$$

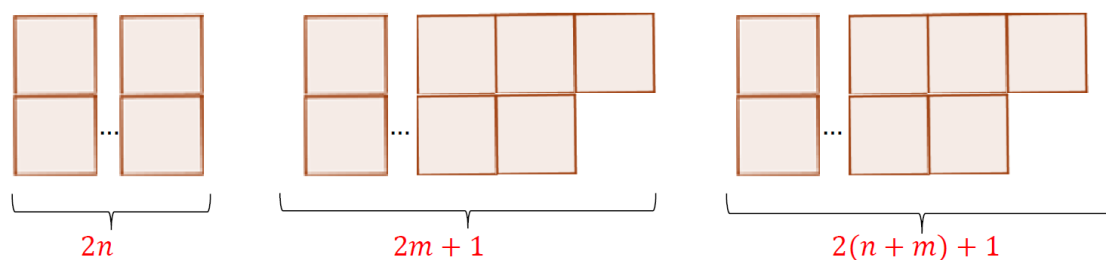
Da eneste løsning av ligningen er $b = \frac{8}{7}$, er det ikke mulig å finne et helt tall større enn 0 slik at $b + 8 = 8b$. Dermed er utsagn 4 alltid usant.

Eksamen V20 oppgave 4

Jeg justerer representasjonene slik at de gjelder for summen av et hvilket som helst partall og et hvilket som helst oddetall. For eksempel kan det gjøres som vist nedenfor:

Jeg lar n og m være hele tall som er større eller lik 0. Ved den distributive lover er $2n + 2m = 2(n + m)$. Dermed er $2n + (2m + 1) = 2(n + m) + 1$. Denne relasjonen sier at summen av hvilket som helst partall og et hvilket som helst oddetall alltid blir et oddetall.

Nedenfor har jeg vist akkurat det samme ved hjelp av en geometrisk representasjon. Poenget i denne representasjonen er at $2n$ bare vil bestå av par av kvadrater. $2m + 1$ vil bestå av et visst antall par og et kvadrat til overs. Når vi legger sammen alle kvadratene i $2n$ og $2m + 1$, vil vi få et bestemt antall par, og et kvadrat til overs.



Eksamen V20 oppgave 8

- a) Regneark kan fremme behovet for å lage formler, fordi formlene som lages kan kopieres. I regneark brukes formler der variabler inngår. I oppgaven over vil det si å lage en formel for differansen mellom det andre og det første hoppet, slik at man finner differansen mellom alle elevene sitt andre og første hopp, der lengden på hoppene er variablene som inngår i formelen.
- b) Et eksempel kan være «Lag et regneark som vi kan bruke underveis i hoppinga, som er slik at vi kan fylle inn lengden på hvert av hoppene, og så får vi automatisk vite hvor mye lenger det andre hoppet er enn det første.» Poenget med denne oppgaven er at den spør om noe som er mer generelt enn differansen mellom Somayas andre og første hopp. For å løse oppgaven må elevene lage en formel som kan brukes for å finne differansen for alle elevene.